

Wie liest man mathematische Texte?

(Prof. Dr. Petra Schwer)

"Mathebücher liest man nicht in Seiten pro Stunde, sondern in Stunden pro Seite."

Ein Mathebuch liest sich nicht wie ein Roman. Das haben Sie sicher schon von alleine gemerkt. Wie liest man aber mathematische Texte? Und wie kann man mit einem Buch oder Skript lernen? Ich habe Ihnen hier eine Anleitung zum selbständigen Lesen und Erarbeiten mathematischer Texte zusammengestellt. Damit können Sie sich im Prinzip jedes Paper, Buch, Skript oder auch jeden Vorlesungsmitschrieb aneignen.

Lesen mathematischer Texte ist schwierig. Aber nur Mut: Sie können schwierige Sachen schaffen!

Generelle Tipps:

- Langsam lesen! Nein, noch langsamer!
- Nehmen Sie sich Zeit.
Stellen Sie sich darauf ein, dass es lange dauert eine Seite zu verstehen und in den allermeisten Fällen mehr als einen Anlauf braucht. Planen Sie einerseits an mehreren Tagen Zeit zum Arbeiten ein. Machen Sie andererseits die Arbeitseinheiten nicht zu kurz. Mathe braucht Zeit. Zeit, die Sie mit dem Text arbeiten und Zeit in der die Mathematik im Kopf reifen kann.
- Stellen Sie sich selbst und anderen präzise Fragen.
Dieser Punkt ist wichtig, denn Fragen sind nötig um Verstehen zu ermöglichen.
Überhaupt keine Frage ist: "Ich verstehe Definition 3.12 nicht."
Keine präzise Frage ist: "Wie ist Definition 3.12 zu verstehen?"
Eine präzise Frage ist: "Warum ist in der Definition der inversen Abbildung die Abbildung selbst immer bijektiv?"
- Sprechen Sie mit anderen über das Material.
Versuchen Sie dabei sich so genau wie möglich auszudrücken und Fachvokabular zu verwenden. Tauschen Sie sich auch dann aus, wenn Sie denken alles verstanden zu haben. Manchmal stellt man erst, wenn man mit anderen darüber spricht fest, ob man etwas verstanden hat oder nicht. Wenn Sie länger feststecken, scheuen Sie sich nicht andere zu fragen oder andere Quellen zu Rate zu ziehen. Lassen Sie die Quellen nicht nebeneinander stehen, sondern
- Lesen ist auch schreiben:
 - o Markieren Sie unklare Stellen
 - o Schreiben Sie sich selbst Zusammenfassungen für die einzelnen Themen oder auch für Beweise wichtiger Sätze (nicht für jedes Lemma).
 - o Schreiben Sie alle Details zu den vorhandenen Beispielen auf. Diese sind oft knapp gehalten in Büchern. Schreiben Sie sich alle Argumente detailliert hin.
 - o Überlegen Sie sich selbst neue Beispiele und schreiben Sie diese auf.

Die nächsten beiden Tipps widersprechen sich. Sind aber beide so wichtig. Finden Sie für sich selbst die richtige Balance zwischen

- Dranbleiben: Geben Sie nicht sofort auf, wenn Sie eine Zeile nicht verstehen. Versuchen Sie nachzuvollziehen was da steht.
- Weitermachen: Wenn Sie etwas wirklich nicht verstehen, lesen Sie weiter (und kommen Sie später an diese Stelle zurück). Manchmal wird durch eine andere Erklärung etwas weiter unten im Text der Sachverhalt klar.

Wie liest man nun einen mathematischen Text?

In drei (oder fünf) Stufen.

Die erste können Sie überall machen. Auf dem Sofa, in der Straßenbahn, auf der Parkbank in der Sonne, ... wo auch immer Sie Ihr Buch oder elektronisches Gerät in der Hand halten können. Mein Sohn liest am liebsten auf der Schaukel. Ob Sie sich Notizen machen in diesem Durchgang bleibt Ihnen überlassen.

1. Überblick verschaffen

Lesen Sie den Text quer. Sie können hier ruhig einfach den Text schnell überfliegen als würden Sie ein normales Buch lesen. Das Ziel ist es erst einmal nur sich einen Überblick zu verschaffen, was alles an Inhalt da ist. Stellen Sie sich folgende Fragen:

- a. Worum geht es in dem Text? In welche Unterabschnitte ist der Text gegliedert?
(Diese Abschnitte können Ihnen später als Arbeitspakete dienen. Sie müssen ja nicht gleich alles auf einmal verstehen.)
- b. Was sind die wichtigsten Ideen?
- c. Welcher Teil sieht besonders trickreich oder schwierig aus (und warum)?
- d. Gibt es viele Definitionen und neue Konzepte?
Oder gibt es viele und/oder lange Beweise?
- e. Was weiß ich schon über das Thema?
Kommt mir etwas im Kapitel vielleicht schon bekannt vor?

Sie haben nun einen ersten Überblick über den Text und wissen ungefähr was darin vorkommt. Die wichtigsten Begriffe und Namen von Objekten, Methoden oder Sätzen haben Sie sich vielleicht schon gemerkt. Jetzt geht es daran den Inhalt auch zu verstehen. Sind Sie bereit?

Für die zweite und dritte Stufe suchen Sie sich einen Platz an dem Sie konzentriert arbeiten können und nicht abgelenkt werden. Eine halbe Stunde ununterbrochenes, konzentriertes Arbeiten bringt mehr als eine Stunde abgelenktes Arbeiten.

2. Definitionen und Aussagen verstehen

Hier geht es darum sich ein tieferes Verständnis der Inhalte zu erarbeiten. Denken Sie dran: das braucht Zeit. Hier eine Reihe von Fragen, die sie sich beim Lesen immer stellen können, um das Material besser zu verstehen:

a. Definitionen und Beispiele lesen:

Fragen Sie sich bei jeder Definition, die Sie lesen:

- Warum definieren wir das?
Handelt es sich um eine zusätzliche Eigenschaft eines bekannten Objektes? Wird hier ein ganz neues Objekt eingeführt? Oder ist das eine technische Definition?
- Warum ist der Begriff wohldefiniert?
- Wofür braucht man den Begriff? Warum ist er relevant? (Das ist manchmal schwer auf Anhieb zu sehen.)

Keine Definition ohne Beispiele:

- Was ist ein Beispiel für diese Definition?
- Was ist ein nicht-Beispiel? Also ein Objekt, das so ähnlich aussieht aber die Bedingungen nicht oder nicht alle erfüllt.
- Kann ich die gegebenen Beispiele nachvollziehen und die eventuell vorhandenen argumentativen Lücken selbst füllen? Warum vielleicht nicht? (Dann nochmal die Definition lesen - bis es geht).

b. Lemmata/Sätze/Korollare lesen:

Fragen Sie sich bei jeder mathematischen Aussage, die Sie lesen:

- Verstehe ich die Aussage? Dazu gehört sich zu überlegen, welcher Teil zur Voraussetzung gehört und was die Folgerung ist.
- Was sind Beispiele für diese Aussage? Wie sieht das in einem konkreten Fall aus?
- Was passiert, wenn ein Objekt eine (oder mehrere) Voraussetzungen nicht erfüllt? Gilt der Satz dann noch? Wenn nein, was geht schief?
- Warum ist das ein Lemma/Satz/Korollar?
- Was erklärt die Aussage und wie passt sie in den Kontext des restlichen Inhaltes?

So ein Text hat oft noch Bemerkungen (die dienen zusätzlichen Erläuterungen, manchmal auch zum transportieren von Ideen und Intuition), einführenden oder überleitenden Zwischentexten und Notationen (hier werden Schreib- und Sprechweisen festgelegt). Lesen Sie auch diese Abschnitte!

Der nächste, dritte Schritt dauert erfahrungsgemäß am Längsten. Hier können Sie aber in kleinen Portionen vorgehen und notfalls das Verstehen von Beweisen auf später verschieben nachdem Sie sich mit Hilfe von Schritt 4 mit dem Material vertrauter gemacht haben.

3. Beweise verstehen

Jetzt wird es noch spannender. Gehen Sie den Dingen auf den Grund und finden Sie heraus warum etwas so funktioniert wie es funktioniert. Wir lesen Beweise!

Beweise sind nicht nur dazu da Aussagen zu verifizieren. Sie helfen auch ein besseres Verständnis über Zusammenhänge und Eigenschaften der Objekte zu bekommen.

Behandeln Sie jeden Beweis wie einen eigenen kleinen mathematischen Text. Wir starten also wieder mit dem ersten Teil: Überblick verschaffen!

a. Lesen Sie den Beweis quer.

- Was für eine Beweistechnik wird benutzt?
- Gibt es Zwischenaussagen/Unterbehauptungen im Beweis?
- Was ist die Idee? (Das ist manchmal nicht so leicht an dieser Stelle zu sehen. Wenn Sie das noch nicht herausgefunden haben lesen Sie trotzdem weiter.)
- Welche Teile sehen schwierig aus?
- Wo werden die Voraussetzungen benutzt? (Auch das ist manchmal schwer auf Anhieb zu sehen. Weiterlesen, wenn es unklar sein sollte.)

b. Lesen Sie den Beweis sorgfältig Zeile für Zeile.

- Verstehe ich die einzelnen Schritte und Umformungen?
- Welche Voraussetzungen oder Eigenschaften der Objekte brauche ich in einem Schritt?
- Haben ich einen ähnlichen Beweis schonmal gesehen?
- Kann ich den Beweis an einem Beispiel nachvollziehen?

c. Fassen Sie die wichtigsten Punkte zusammen.

- Was sind die wichtigsten Ideen des Beweises und
- Wo werden die Voraussetzungen gebraucht?

Glückwunsch! Sie haben schon viel gearbeitet und ganz viel geschafft, wenn Sie bis hier gekommen sind. Jetzt fragen Sie sich sicher, wie Sie feststellen können, ob Sie wirklich verstanden haben, was Sie gelesen haben.

Wie kann ich prüfen, ob ich den Text verstanden habe?

Mathematik lernt man im Wesentlichen durch Machen. Nun müssen Sie nicht gleich neue Mathematik machen. Aber Sie müssen sich die für Sie neue Mathematik erarbeiten und selbst zu eigen machen. Die wichtigste Methode hierzu ist der vierte Schritt:

4. Übungsaufgaben lösen

Hierzu ist schon ganz viel Gutes geschrieben worden. Eine unbedingte Leseempfehlung ist die ausführliche Anleitung von Manfred Lehn, die Sie hier finden:

<https://www.agtz.mathematik.uni-mainz.de/wie-bearbeitet-man-ein-uebungsblatt-von-prof-dr-manfred-lehn/>

Die wesentlichen Schritte sind:

- a. Schauen Sie sich das Blatt so früh wie möglich an. So haben Sie die Aufgaben schonmal im Kopf und können darüber nachdenken. (Auch hier helfen die Tipps aus 1. - so ein Blatt ist auch ein mathematischer Text.)
- b. Verstehen Sie zunächst die Aufgabenstellung.
Ja, das ist ein separater Schritt. Nur wenn Sie wissen, was Sie eigentlich machen sollen können Sie loslegen. Wenn Sie nicht weiter wissen überlegen Sie mal, ob Sie die relevanten Definitionen noch wissen und verstanden haben.
- c. Reden Sie über die Aufgaben.
- d. Denken Sie in Ruhe und konzentriert über die Aufgaben nach.
- e. Schreiben Sie die Lösung auf.
Die Bearbeitung einer Aufgabe ist nicht fertig, wenn Sie im Prinzip die Idee der Lösung im Kopf haben. Mathematik sauber aufzuschreiben ist nochmal ein separater Schritt, der manchmal schwerer sein kann als sich eine Lösung zu überlegen. Auch wenn in Ihrem Kopf die perfekte Idee schon da ist.
- f. Erklären Sie die Lösung anderen.
Das geht auch, wenn Sie nicht 100 Prozent davon überzeugt sind alles richtig zu haben. Dann können Sie andere bitten den Fehler zu finden, oder ihr Argument nochmal genau unter die Lupe zu nehmen. Keiner frisst sie auf.

Ganz am Ende empfiehlt es sich den ersten Schritt zu wiederholen und ihr gewonnenes Wissen in ein größeres Bild zu fassen. Damit stellen Sie sicher, dass Sie sich im kleinteiligen Lesen von Definitionen, Beispielen, Lemma, Sätzen und Beweisen nicht völlig verirren. Der sprichwörtliche Wald....

5. Überblick schaffen

Verschaffen Sie sich nochmal strukturiert einen Überblick über das Thema. Machen Sie sich diesmal dazu auch Notizen. Stellen Sie sich wieder die Fragen vom Anfang:

- a. Worum geht es in dem Text?
- b. Was sind die wichtigsten Ideen?
- c. Welche sind die wichtigsten Definitionen und Aussagen?
- d. Was fällt mir noch schwer? Womit komme ich gut klar?

Geschafft! Herzlichen Glückwunsch!

Manchmal sind immer noch viele Fragen offen, nachdem Sie bis hierhin gekommen sind. Einiges wird sich aber auch schon geklärt haben. Fangen Sie nochmal bei Schritt 1 an und sprechen Sie mit anderen darüber. Vieles wird sich klären. Manchmal sofort, manchmal erst viel später.

