Übungsblatt 5

16. November 2022
Körper, Ringe, Gauß-Algorithmus

Aufgaben zur Besprechung in der Übung am 16. November 2022

Aufgabe P1

Ein *Ringmorphismus* ist eine Abbildung $\varphi : R \to S$ (wobei $(R, +, \cdot)$ und $(S, \oplus, \odot)$ Ringe sind), welche die algebraische Struktur der Ringe erhält, d.h.

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y) \quad \text{und} \quad \varphi(r \cdot x) = \varphi(r) \odot \varphi(x)$$

für *alle* $x, y, r \in R$. (Notation im Speziallfall: wenn sowohl $(R, +, \cdot)$ als auch $(S, \oplus, \odot)$ Körper sind, heißt φ ein *Körpermorphismus*.)
Beweisen Sie:

a) $\varphi(0_R) = 0_S$.

b) Der *Kern* von φ, also die Teilmenge $\ker(\varphi) := \{x \in R \mid \varphi(x) = 0_S\}$, ist ein *Ideal* von R. Das bedeutet: $x, y \in \ker(\varphi) \implies x + y \in \ker(\varphi)$, und $r \in R, x \in \ker(\varphi) \implies r \cdot x \in \ker(\varphi)$. (In anderen Worten: $\ker(\varphi)$ ist abgeschlossen unter der Addition seiner Elemente sowie abgeschlossen unter der Multiplikation seiner Elemente mit beliebigen Ringelementen.)

Aufgabe P2

Wiederholen Sie den Begriff der *elementaren Umformungen* (Vorlesungsskript) für lineare Gleichungssysteme und bringen Sie folgendes *reelles* lineares Gleichungssytem

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = -1 \\ 2x + 3y + 6z = -1 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$$

zur normierten Zeilenstufenform, d.h. einer Dreiecksform, bei der die ersten von Null verschiedenen Koeffizienten jeder Zeile alle gleich 1 sind. Wie bekommt man daraus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems?