Übungsblatt 9

14. Dezember 2022
Produkte und Summen von Räumen, lineare Abbildungen

Aufgaben zur Besprechung in der Übung am 14. Dezember 2022

Aufgabe P1

Die *Konjugationsabbildung* komplexer Zahlen ist die Abbildung $\kappa : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch die Zuordnung

$$z = x + iy \mapsto \overline{z} := x - iy \in \mathbb{C}.$$

a) Beweisen Sie, dass die Konjugationsabbildung κ linear ist, wenn $\mathbb{C}$ wie gewöhnlich als $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{Q}$-Vektorraum interpretiert wird, aber *nicht* wenn $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum interpretiert wird.

b) Zeigen Sie, dass $\kappa^2 = \mathrm{id}$ und beschreiben Sie in Ihren eigenen Worten, was κ geometrisch auf $\mathbb{C}$ macht.

c) Betrachten Sie nun den $\mathbb{C}$-Vektorraum $V := \mathbb{C}^2$ und die von κ induzierte Abbildung auf Koordinaten, also

$$f : V \to V, \quad v = \binom{z_1}{z_2} \mapsto f(v) := \begin{pmatrix} \kappa(z_1) \\ \kappa(z_2) \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie, dass f nicht linear ist aber trotzdem die lineare Unabhängigkeit erhält, d.h. zwei Vektoren $u, v \in V$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $f(u), f(v) \in V$ linear unabhängig sind.