Übungsblatt 8

02.12.2022
Erzeugendensysteme, Basen, Dimension

Hausaufgaben

(Abgabe über Moodle bis spätestens 11:00 Uhr am 9. Dezember 2022.)

Aufgabe H1

Gegeben seien ein beliebiger Körper $\mathbb{K}$ und der $\mathbb{K}$-Vektorraum $V = \mathbb{K}^2$. Beweisen Sie folgendes: zwei Vektoren $u = \left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right)$, $v = \left(\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right) \in V$ bilden **genau dann** eine Basis von V, **wenn** $ad - bc \neq 0$.

Aufgabe H2

Bestimmen Sie für die folgenden $\mathbb{R}$-Vektorräume jeweils eine Basis und weisen Sie die Basiseigenschaften nach, und geben Sie die Dimensionen der Räume an (immer noch über $\mathbb{R}$).

a) $V = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 = x_3 \right\}$.

b) $W = \mathrm{Spann}(\{t^2,\, t + t^2,\, 1 + t^2,\, 1 + t + t^2,\, t^5 + t^7\}) \subset \mathbb{R}[t]$.

Aufgabe H3

a) Berechnen Sie begründet $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$ und $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$.

b) Kann ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum V einen unendlich dimensionalen $\mathbb{K}$-Untervektorraum enthalten? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Seien V wie in Aufgabe 2 und $U = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a \\ 0 \\ a \end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$, auch interpretiert als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Berechnen Sie die Dimension (über $\mathbb{R}$) des kartesischen Produkts $U \times V$.