



## Übungsblatt 13

18. Januar 2023

Basiswechsel

### Aufgaben zur Besprechung in der Übung am 18. Januar 2023

#### Aufgabe P1

Gegeben sei der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V = \mathbb{R}^2$  mit der Standardbasis  $\mathcal{S} = \{e_1, e_2, e_3\}$  und die lineare Abbildung

$$\Psi : V \rightarrow V, \quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \Psi(v) := \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 2y \end{pmatrix}$$

- a) Berechnen Sie  $\Psi(e_1)$ ,  $\Psi(e_2)$ ,  $\Psi^2(e_1)$  sowie  $\Psi^2(e_2)$  und überlegen Sie darüber hinaus, wie viel Zeit es kosten würde,  $\Psi^{2023}(e_1)$  und  $\Psi^{2023}(e_2)$  auszurechnen.  
(Hinweis: mit  $\Psi^n$  ist gemeint die  $n$ -fache Hintereinanderausführung der Abbildung  $\Psi$  mit sich selbst.)
- b) Dagegen zeigen Sie: die Vektoren  $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  bilden eine Basis  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$  von  $V$  derart, dass  $\Psi^n(v_1) = \lambda_1^n(v_1)$  und  $\Psi^n(v_2) = \lambda_2^n(v_2)$  für irgendwelche Skalare  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ .
- c) Bestimmen Sie die Basisdarstellungen

$${}_S[\Psi]_S \quad \text{und} \quad {}_B[\Psi]_B$$

sowie die Basiswechselmatrizen

$${}_B[\text{id}_V]_S \quad \text{und} \quad {}_S[\text{id}_V]_B.$$

- d) Geben Sie Formeln für  ${}_S[\Psi]_S^n$  und  $\Psi^n(v)$  für beliebige  $n \in \mathbb{N}$  und  $v \in V$  an.  
(Hinweis: Für eine  $m \times m$  Matrix  $A$  ist  $A^m$  die  $m$ -te Potenz von  $A$  bezüglich der üblichen Matrixmultiplikation.)