Übungsblatt 4

9. November 2022
Algebraische Strukturen

Aufgaben zur Besprechung in der Übung am 9. November 2022

Aufgabe P1

Betrachten Sie die folgenden Gruppen:

$$(S_3, \circ), \quad (\mathbb{Z}, +), \quad (S_n, \circ),$$

wobei S_n die Menge der Bijektionen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ darstellt.
Geben Sie explizite Beispiele von echten nicht-trivialen Untergruppen der oben genannten Gruppen an.
(Definition: eine Untergruppe $(H, *)$ einer Gruppe $(G, *)$ heißt *echt*, wenn $H \neq G$. Sie heißt *nicht-trivial*, wenn $H \neq \{e\}$, wobei e das neutrale Element von G ist.)

Aufgabe P2

Die *komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$ sind gegeben durch

$$\mathbb{C} = \{z = a \underline{+} bi \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\},$$

wobei i die *imaginäre Einheit* ist. Diese Menge besitzt zwei algebraische Operationen, genannt die *Addition* (bezeichnet hier mit „$\underline{+}$“) und *Multiplikation* (bezeichnet hier mit „$\bullet$“) komplexer Zahlen. Diese werden wie folgt definiert.

$$\text{Gegeben } z_1 = a_1 \underline{+} b_1 i \in \mathbb{C} \text{ und } z_2 = a_2 \underline{+} b_2 i \in \mathbb{C},$$

$$z_1 \underline{+} z_2 := (a_1 + a_2) \underline{+} (b_1 + b_2)i \quad \text{und} \quad z_1 \bullet z_2 := (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) \underline{+} (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2)i,$$

wobei „$+$“ bzw. „$\cdot$“ die übliche Addition bzw. Multiplikation *reeller* Zahlen darstellt.

a) Beweisen Sie, dass die imaginäre Einheit die folgende Identität erfüllt:

$$(0 \underline{+} 1i)^2 = (0 \underline{+} 1i) \bullet (0 \underline{+} 1i) = -1 \underline{+} 0i.$$

b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{C}, \underline{+})$ eine *abelsche* Gruppe bildet.

c) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{C} \setminus \{0 + 0i\}, \bullet)$ ebenfalls eine *abelsche* Gruppe bildet.

d) Erklären Sie, warum das *Distributivgesetz* für das Tripel $(\mathbb{C}, \underline{+}, \bullet)$ gilt. In anderen Worten: zeigen Sie, dass für *alle* $x, y, z \in \mathbb{C}$ gilt

$$x \bullet (y \underline{+} z) = (x \bullet y) \underline{+} (x \bullet z) \quad \text{sowie } (y \underline{+} z) \bullet x = (y \bullet x) \underline{+} (z \bullet x).$$

(<u>Hinweis zur Notation:</u> Nachdem man die oben genannten Eigenschaften für $(\mathbb{C}, \underline{+}, \bullet)$ kennt, schreibt man zur Vereinfachung der Notation bloß „$+$" (bzw. „$\cdot$") statt „$\underline{+}$" (bzw. „$\bullet$"), weil jene Operationen sich genauso wie die üblichen Operationen der reellen Zahlen verhalten. Außerdem wird geschrieben einfach „i" für die komplexe Zahl „$0 \underline{+} 1i$" und „r" für die komplexe Zahl „$r \underline{+} 0i$". Somit lassen sich die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als Teilmenge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mittels der Identifikation $r \mapsto r \underline{+} 0i$ darstellen und es gilt die Eigenschaft $i^2 = -1$ für die imaginäre Einheit.)