Übungsblatt 1

19. Oktober 2022
2-dimensionale lineare Algebra

Aufgaben zur Besprechung in der Übungsgruppe

Aufgabe P1

Beweisen Sie, dass eine Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ genau dann linear ist, wenn für alle Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und für alle Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^2$ folgendes gilt:

$$\phi(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot \phi(x) + \mu \cdot \phi(y).$$

Diskussion: Was genau muss man hier beweisen? Warum ist das nicht "klar"nach der Definition?

Aufgabe P2

Gegeben $t \in \mathbb{R}$ betrachten Sie die sogenannten 2×2-*Elementarmatrizen* $E_{1,2}(t)$ und $E_{2,1}(t)$, gegeben durch $E_{1,2}(t) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $E_{2,1}(t) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Die dazu gehörigen Linearabbildungen $\phi_{E_{1,2}(t)}$ und $\phi_{E_{2,1}(t)}$ heißen *Scherungen* in der Ebene $\mathbb{R}^2$. Es sei ferner ein Rechteck $\square \subset \mathbb{R}^2$ gegeben mit den Vertices $\mathcal{O}$, u, v und w:

$$\mathcal{O} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right),\ u = \left(\begin{smallmatrix} r \\ 0 \end{smallmatrix}\right),\ v = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ s \end{smallmatrix}\right) \text{ und } w = \left(\begin{smallmatrix} r \\ s \end{smallmatrix}\right), \text{ wobei } r, s \in \mathbb{R}.$$

Beschreiben Sie, was geometrisch mit dem Rechteck $\square$ unter Anwendung der Scherungen $\phi_{E_{1,2}(t)}$ und $\phi_{E_{2,1}(t)}$ passiert. Wie ändert sich der Flächeninhalt von $\square$?

Hinweis: Machen Sie sich Skizzen und betrachten Sie ein Beispiel. Können Sie sich veranschaulichen, welchen Effekt die Elementarmatrizen für verschiedene Werte von t haben?

Hausaufgaben

(Abgabe über Moodle bis spätestens 26.10.2022 vor(!) den Übungen. Eine Abgabekachel wird rechtzeitig freigeschaltet.)

Aufgabe 1

Eine 2×2-Matrix A mit Einträgen aus $\mathbb{R}$ heißt *invertierbar*, wenn die zugehörige lineare Abbildung $\phi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine bijektive Abbildung ist.

a) Beweisen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn es weitere 2×2-Matrizen B und C derart gibt, dass $A \cdot B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = C \cdot A$ gilt. Zeigen Sie weiter, dass dann $B = C$ gelten muss.
(Diese eindeutige Matrix $B = C$ wird mit A^{-1} bezeichnet und heißt das *Inverse* von A.)

b) Die Abbildungsmatrix einer Drehung in $\mathbb{R}^2$ um einen Winkel von Bogenmaß θ ist gegeben durch $\left(\begin{smallmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{smallmatrix}\right)$. Ist jene Matrix invertierbar? Wenn sie invertierbar ist - was ist ihre Inverse? Sie können algebraisch oder geometrisch argumentieren.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Systems

$$A_{\phi,y}(x) = \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 12 \\ x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$$

mithilfe des Satzes 1.18 über Lösungsmengen von $A_{\phi,y}(x)$ aus der Vorlesung. Können Sie benennen was jeweils A, ϕ, x und y sind?

Aufgabe 3

Es seien A und B aussagen. Für welche Wahrheitswerte von A und B unterscheiden sich der Wahrheitswert von $A \implies B$ von dem von $A \iff B$? Begründen Sie Ihre Antwort.