Übungsblatt 9

09.12.2022
Lineare Abbildungen

Hausaufgaben

(Abgabe über Moodle bis spätestens 12:59 Uhr am 16. Dezember 2022 (vor der Vorlesung).)

Aufgabe H1

Es seien in dieser Aufgabe $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper, $r \in \mathbb{K}$ ein fest gewählter Skalar, $\mathbb{K}^n$ aufgefasst als $\mathbb{K}$-Vektorraum (mit $n \geq 1$) und $u \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ ein fest gewählter von Null verschiedener Vektor. Bestimmen Sie, welche der folgenden Abbildungen linear sind. Begründen Sie dabei Ihre Antwort.

a) Die Abbildung $\mathfrak{m}_r : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ gegeben durch $\mathfrak{m}_r(v) := r \cdot v$.

b) Die Abbildung $\mathfrak{t}_u : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ gegeben durch $\mathfrak{t}_u(v) := v + u$.

c) Die Abbildung $\mathfrak{a}_{r,u} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ gegeben durch $\mathfrak{a}_{r,u}(v) := r \cdot v + u$.

Aufgabe H2

Betrachten Sie eine 2×3 Matrix A mit *reellen* Einträgen

$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}.$$

Wie üblich wird das kartesische Produkt $\mathbb{R}^n$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum aufgefasst. Weisen Sie nach, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi_A \colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ v = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) &\longmapsto Av \end{aligned}$$

linear ist. (Dabei wird die Matrixmultiplikation Av gegeben durch folgende Regel.)

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z \end{pmatrix}.$$

(Bitte umblättern!)

Aufgabe H3

Seien V und U $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\psi : V \to U$ eine surjektive lineare Abbildung (d.h. für jedes $u \in U$ gibt es irgendwelches $v \in V$ derart, dass $\psi(v) = u$). Nehmen Sie an, V besitzt ein Erzeugendensystem $\{v_1, v_2, v_3\}$.

a) Zeigen Sie, dass $\{\psi(v_1), \psi(v_2), \psi(v_3)\}$ ein Erzeugendensystem von U ist.

b) Schließen Sie, dass $\dim_{\mathbb{K}}(U) \leq 3$.