Übungsblatt 6

18. November 2022
Lineargleichungssysteme, Vektorräume

Hausaufgaben

(Abgabe über Moodle bis spätestens 13:00 Uhr am 25. November 2022.)

Aufgabe H1

a) Wenden Sie den Gauß-Algorithmus an, um die Lösungsmenge des folgenden (reellen) LGS zu bestimmen.

$$\begin{cases} -6x & + & 8y & - & 10z & - & 6w & = & 0 \\ 4x & - & 10y & + & 4z & - & 2w & = & 0 \\ 6x & - & 10y & + & 4z & + & 4w & = & 0 \end{cases}$$

Schreiben Sie auf ihrer Lösung all ihrer Schritte bei der Anwendung des Algorithmus. Überlegen Sie ferner, wie man die Lösungsmenge visualisieren kann (obwohl sie prinzipiell eine Teilmenge des $\mathbb{R}^4$ ist) und skizzieren Sie sie.

b) Betrachten Sie nun das folgende LGS:

$$(*)\begin{cases} x - y & = 1 \\ y - z & = 0 \\ x + z & = 1 \end{cases}$$

Lösen Sie das LGS $(*)$ zweimal, und zwar einmal interpretiert als LGS über dem Restklassenkörper F_2 und einmal interpretiert als LGS über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Wie haben sich die Lösungen in Abhängigkeit vom Körper geändert?

Aufgabe H2

Bestimmen Sie, welche der folgenden Teilmengen Untervektorräume der angegebenen Vektorräume sind.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 2z \right\} \subset \mathbb{R}^3$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ c^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathbb{C}^2$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq x_2 \right\} \subset \mathbb{R}^3$

Für die letzte Aufgabe brauchen wir folgende
Definition: Sei $(\mathbb{L}, +, \cdot)$ ein Körper. Eine Teilmenge $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ heißt *Unterkörper* von $\mathbb{L}$, wenn $\mathbb{K}$ abgeschlossen unter $+$ und $\cdot$ ist und das Tripel $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ebenfalls ein Körper bildet.
(Bemerkung: Im Tripel $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ist zu verstehen, dass „$+$" und „$\cdot$" die jeweiligen Einschränkungen von $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{K}$ sind. Dies ist hier möglich, denn $\mathbb{K}$ ist nach Annahme abgeschlossen unter jenen Operationen.)

Aufgabe H3

Gegeben seien ein Körper $(\mathbb{L}, +, \cdot)$ und ein Teilkörper $\mathbb{K}$. Beweisen Sie, dass $(\mathbb{L}, +, \cdot)$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ bildet. Erklären Sie schließlich, warum die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.