Übungsblatt 8

7. Dezember 2022
Produkte und Summen von Räumen, lineare Abbildungen

Aufgaben zur Besprechung in der Übung am 7. Dezember 2022

Aufgabe P1

Überlegen Sie, wie man die folgende Aussage verallgemeinern kann:

"Zwei von Null verschiedene Vektoren in $\mathbb{R}^2$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie in derselben durch den Nullvektor laufenden Gerade liegen."

In anderen Worten: denken Sie über eine mathematische Aussage nach, welche Sie vielleicht beweisen können und von der die obige Behauptung ein Spezielfall ist.
(Hinweis: Überlegen Sie, was für Begriffe/Objekte in der vorherigen Definition auftauchen, z.B. Vektorraum über einem spezifischen Körper, bestimmte Anzahl von Vektoren, bestimmte Teilmengen vom Raum und so weiter...)

Aufgabe P2

Zu jedem $i \in \mathbb{N}$ sei $V_i = \mathbb{K}$ gegeben, wobei $\mathbb{K}$ ein Körper ist. Betrachten Sie die folgenden $\mathbb{K}$-Vekotrräume.

$$P = \prod_{i \in \mathbb{N}} V_i \quad \text{und} \quad S = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} V_i.$$

a) Weisen Sie nach, dass $\dim_{\mathbb{K}}(S) = \infty$, indem Sie eine explizite abzählbare Basis für S angeben.

b) Zeigen Sie im Gegensatz zur vorherigen Aufgabe, dass jede Basis für P überabzählbar sein muss. (Somit gilt $\dim_{\mathbb{K}}(P) = \infty$ auch.)

c) Diskutieren Sie in der Übung diese Zweideutigkeit vom Symbol "∞", also $\dim_{\mathbb{K}}(P) > \dim_{\mathbb{K}}(S)$, obwohl $\dim_{\mathbb{K}}(P) = \infty$ und $\dim_{\mathbb{K}}(S) = \infty$.

Aufgabe P3

Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^n$ (als $\mathbb{R}$-Vektorraum) unendlich viele invertierbare lineare Abbildungen besitzt.