Übungsblatt 5

10. November 2022
Morphismen, Algebraische Strukturen

Hausaufgaben

(Abgabe über Moodle bis spätestens 13:00 Uhr am 18. November 2022.)

Aufgabe H1

Beweisen Sie die Proposition 4.24 aus der Vorlesung: gegeben zwei Gruppen $(G, \circ)$ und $(H, *)$ und einen Morphismus $\varphi : G \to H$, zeigen Sie, dass folgende Eigenschaften gelten.

1. $\varphi(e_G) = e_H$, wobei e_G (bzw. e_H) das neutrale Element von G (bzw. von H) ist.
2. $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$ für jedes $g \in G$.
   (Bemerkung: auf der linken Seite steht „g^{-1}", also das Inverse von g in G bezüglich der Gruppenoperation $\circ$ von G. Analog steht auf der rechten Seite „$(\varphi(g))^{-1}$", d.h. das Inverse des Elements $\varphi(g) \in H$ bezüglich der Gruppenoperation $*$ von H.)

Aufgabe H2

Lösen Sie schrittweise die Präsenzaufgabe 2 vom Präsenzblatt 4: Betrachten Sie die *komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$, formell gegeben durch $\mathbb{C} = \{z = a \oplus ib \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$, wobei i die *imaginäre Einheit* genannt wird. Dazu betrachten Sie die folgenden Operationen, genannt die *Addition* (bezeichnet in dieser Aufgabe mit „$\oplus$") und *Multiplikation* (bezeichnet in dieser Aufgabe mit „$\odot$") komplexer Zahlen, definiert wie folgt.

$$\text{Gegeben} \quad z_1 = a_1 \oplus ib_1 \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad z_2 = a_2 \oplus ib_2 \in \mathbb{C},$$

$$z_1 \oplus z_2 := (a_1 + a_2) \oplus i(b_1 + b_2) \quad \text{und} \quad z_1 \odot z_2 := (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) \oplus i(a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2),$$

wobei „$+$" bzw. „$\cdot$" die übliche Addition bzw. Multiplikation *reeller* Zahlen darstellt.

a) Beweisen Sie, dass für die imaginäre Einheit die folgende Identität gilt:

$$(0 \oplus i1)^2 = (0 \oplus i1) \odot (0 \oplus i1) = -1 \oplus i0.$$

b) Erklären Sie, warum $(\mathbb{C}, \oplus)$ eine *abelsche* Gruppe bildet. (Vergessen Sie nicht, das neutrale Element bzgl. „$\oplus$" explizit anzugeben.)

c) Prüfen Sie nach, dass für jedes $z = a \oplus ib \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0 \oplus i0$ das Element

$$z^{-1} := \left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right) \oplus i \left(\frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$$

auch in $\mathbb{C}$ liegt und dass die folgenden Identitäten gelten: $z \odot z^{-1} = 1 \oplus i0 = z^{-1} \odot z$.

d) Beweisen Sie, dass $(\mathbb{C} \setminus \{0 \oplus i0\}, \odot)$ ebenfalls eine *abelsche* Gruppe bildet. (Vergessen Sie nicht, das neutrale Element bzgl. „$\odot$" explizit anzugeben.)

e) Erklären Sie ferner, warum das *Distributivgesetz* für das Tripel $(\mathbb{C}, \oplus, \odot)$ gilt. In anderen Worten: zeigen Sie, dass für *alle* $x, y, z \in \mathbb{C}$ gilt

$$x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z) \quad \text{sowie } (y \oplus z) \odot x = (y \odot x) \oplus (z \odot x).$$

(Bemerkung: Hat man die obige Aufgabe gelöst, weißt man, dass die komplexen Zahlen einen *Körper* bilden. Weil die oben definierten Operationen „$\oplus$" und „$\odot$" für $\mathbb{C}$ sich genauso wie die üblichen Operationen der reellen Zahlen verhalten, schreibt man zur Vereinfachung der Notation bloß „$+$" (bzw. „$\cdot$") statt „$\oplus$" (bzw. „$\odot$") — vergleiche Beispiel 4.30(b) aus der Vorlesung. Außerdem wird geschrieben einfach „i" für die komplexe Zahl „$0 \oplus i1$" und „r" für die komplexe Zahl „$r \oplus 0i$". Somit lassen sich die reellen Zahlen $r \in \mathbb{R}$ auch als komplexe Zahlen mittels der Identifikation $r \mapsto r \oplus 0i$ darstellen und es gilt die Eigenschaft $i^2 = -1$ für die imaginäre Einheit.)

Aufgabe H3

Betrachten Sie nun die Restklassen von $\mathbb{Z}$ modulo 4 bzw. 7, d.h. die Mengen

$$F_4 := \{[x]_4 \mid x \in \mathbb{Z}\} \quad \text{bzw.} \quad F_7 := \{[x]_7 \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

der Äquivalenzklassen bzgl. der Relationen $R_4 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ bzw. $R_7 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ wie in der Vorlesung definiert. Auch aus der Vorlesung kennen wir für F_4 und F_7 eine Multiplikation definiert durch

$$[x]_4 \cdot [y]_4 := [x \cdot y]_4 \quad \text{und} \quad [x]_7 \cdot [y]_7 := [x \cdot y]_7,$$

wobei die Multiplikation innerhalb der eckigen Klammern als die übliche Multiplikation der ganzen Zahlen interpretiert wird.

a) Bestimmen Sie alle *Nullteiler* von F_4 sowie von F_7.
(Definition: Ein Element $[x]_m \in F_m$ heißt *Nullteiler*, wenn $[x]_m \neq [0]_m$ und es zu $[x]_m$ ein $[y]_m \in F_m \setminus \{[0]_m\}$ derart gibt, dass $[x]_m \cdot [y]_m = [0]$.)

b) Ersetzt man „7" gegen eine andere Primzahl p, ist es möglich, dass F_p Nullteiler besitzt? Begründen Sie ihre Antwort.