

Übungsblatt 12

13.1.2023

Koordinaten, lineare Abbildungen und Matrizen

Hausaufgaben

(Abgabe über Moodle bis spätestens 13:00 Uhr am 20. Januar 2023.)

Aufgabe H1

Betrachten Sie die folgenden Matrizen mit reellen Einträgen.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

- a) Ist das Produkt $D = ABC$ definiert? Wenn ja, bestimmen Sie den Eintrag $d_{2,3}$ (d.h. 2. Zeile, 3. Spalte) der Matrix D .
- b) Ist das Produkt $E = CBA$ definiert? Wenn ja, bestimmen Sie den Eintrag $e_{2,2}$ (d.h. 2. Zeile, 2. Spalte) der Matrix E .
- c) Nehmen Sie jetzt an, B ist die Basisdarstellung irgendwelcher linearen Abbildung $\Psi : X \rightarrow Y$ zwischen \mathbb{R} -Vektorräumen X und Y . Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(X)$ sowie $\dim_{\mathbb{R}}(Y)$.

Aufgabe H2

Betrachten Sie die \mathbb{R} -Vektorräume $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$ und die lineare Abbildung

$$\varphi : V \rightarrow W, \quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \varphi(v) := \begin{pmatrix} x-y \\ 2y \\ 2x+y \end{pmatrix}.$$

Wählen Sie für V zwei verschiedene Basen $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ und für W zwei verschiedene Basen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ und bestimmen Sie die folgenden Basisdarstellungen von φ :

$${}_{\mathcal{B}}[\varphi]_{\mathcal{A}}, \quad {}_{\mathcal{B}'}[\varphi]_{\mathcal{A}} \quad \text{und} \quad {}_{\mathcal{B}'}[\varphi]_{\mathcal{A}'}$$

Aufgabe H3

Es sei wieder W der \mathbb{R} -Vektorraum $W = \mathbb{R}^3$ mit den Basen

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{sowie} \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Geben Sie explizit diejenige lineare Abbildung an, welche die Basis \mathcal{A} geordnet (d.h. bzgl. der angegebenen Reihenfolge der Basisvektoren) auf die Basis \mathcal{B} abbildet.