Übungsblatt 13

20.1.2023
Matrizen

Zusatzhausaufgaben

**(Die folgenden Hausaufgaben sind *extra*, es besteht also keine Abgabepflicht. Wenn Sie aber Ihre Lösungen abgeben möchten, werden diese wie üblich korrigiert und Sie bekommen entsprechend *Bonus*plusse oder *Bonus*kringel bei Ihren Hausaufgaben.
Freiwillige Abgabe über Moodle bis spätestens 23:59 Uhr am 27. Januar 2023.)**

Aufgabe H1

Betrachten Sie die folgenden Matrizen mit reellen Einträgen.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & a & 0 \\ 1 & 4 & 2+a \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t^2 \\ 1 & t^2 & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5t & 6 \end{pmatrix} \text{ und } \quad A_4 = \begin{pmatrix} a & t \\ t & a \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit der Parameter t bzw. a welche der Matrizen A_1, A_2, A_3 und A_4 invertierbar sind.

(Tipp: Zum Beispiel für A_2 können Sie eines der Kriterien für Invertierbarkeit anwenden (Prop. 5.54), um ein oder mehrere Polynome (in Abhängigkeit von t) zu finden, sodass A_2 genau dann invertierbar ist, wenn die von Ihnen gefundene Polynome bestimmte Werte annehmen. Um Ihren Befund zu verfeinern, prüfen Sie im Anschluss weiter, für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ Ihre Polynome diejenigen Werte annehmen, die die Invertierbarkeit von A_2 zulassen.)

b) Bestimmen Sie die inversen Matrizen (mit Einträgen ggf. in Abhängigkeit von t bzw. a), falls diese existieren, und verifizieren Sie durch eine explizite Überprüfung, dass Ihre Resultate stimmen.

Aufgabe H2

Gegeben seien ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V und eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$. Beweisen Sie, dass φ^2 (also $\varphi \circ \varphi$) genau dann mit der *Nullabbildung* übereinstimmt, wenn $\mathrm{im}\varphi \subseteq \ker\varphi$. Und wenn das der Fall ist, was können Sie unter der Annahme $\dim_{\mathbb{K}}(V) < \infty$ über $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{im}\varphi)$ und $\dim_{\mathbb{K}}(\ker\varphi)$ sagen?

(Erklärung: Die *Nullabbildung*, manchmal bezeichnet mit $0 : V \to V$, ist die lineare Abbildung, welche *alle* Vektoren des Definitionsbereichs einfach auf den Nullvektor des Zielbereichs abbildet.)

(Bitte umblättern!)

Aufgabe H3

Betrachten Sie das folgende Lineargleichungssystem über $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} -2x + 3y + 7z & = -12 \\ 4x - 6y - 13z & = 24 \\ -2x + 4y + 8z & = -14 \end{cases}$$

a) Beschreiben Sie in Ihren eigenen Worten, was jede Gleichung des Systems geometrisch auf $\mathbb{R}^3$ darstellt, und fertigen Sie Skizzen dazu an.

b) Stellen Sie sich jetzt vor, Sie würden anfangen, das System zu lösen. Dabei sind Sie auf dem folgenden äquivalenten System gelandet.

$$\begin{cases} -2x + 3y + 7z & = -12 \\ z & = 0 \\ -2x + 4y + 8z & = -14 \end{cases}$$

Schreiben Sie beide Systeme in Matrixform hin und finden Sie eine explizite Matrix, welche das ursprüngliche System in das neue (obige) System umformt. Erkennen Sie, was für eine Art Matrix das ist?

c) Lösen Sie das System weiter, indem Sie es in Matrixform betrachten und es durch Matrixmultiplikation von links mit explizit angegebenen Matrizen der Form „V_{ij}, $R_{i,\lambda}$ und/oder S_{ij}“ (wie im Buch von Waldmann beschrieben) zu einer Zeilenstufenform bringen.

d) Geben Sie in Ihren eigenen Worten eine geometrische Begründung für das Aussehen der Lösungsmenge des Systems.