# Übungsblatt 2

28. Oktober 2022
Abbildungen, Relationen und Gruppen

## Hausaufgaben

**(Abgabe über Moodle bis spätestens 13:00 Uhr am 4. November 2022. Eine Abgabekachel wird rechtzeitig freigeschaltet.)**

### Aufgabe 1

Erklären Sie in ihren eigenen Worten warum es wichtig ist, dass eine Abbildung sowohl injektiv als auch surjektiv ist, um ihre inverse Abbildung definieren zu können.

### Aufgabe 2

Gegeben seien die Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$ und die binäre Relation $R \subset M \times M$ auf der Menge $M$ mit

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (x, y), (4, 4)\}.$$

**a)** Wählen Sie konkrete $x, y \in \mathbb{N}$ so, dass die Relation $R$ nur reflexiv aber nicht symmetrisch und transitiv ist.

**b)** Wählen Sie konkrete $x, y \in \mathbb{N}$ so, dass die Relation $R$ nur symmetrisch aber nicht reflexiv und transitiv wird.

**c)** Wählen Sie konkrete $x, y \in \mathbb{N}$ so, dass die Relation $R$ nur transitiv aber nicht reflexiv und symmetrisch wird.

Begründen Sie in allen Fällen ihre Wahl und weisen Sie die jeweiligen Eigenschaften nach.

### Aufgabe 3

Beweisen Sie folgendes: jede Gruppe $G$, in der *alle* Elemente $g \in G$ die Eigenschaft $g^2 = e$ haben, ist abelsch.

### Aufgabe 4

Die *Determinante* einer $2 \times 2$-Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ist definiert als $det(A) = ad - bc$. Betrachten Sie die Menge $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ aller $2 \times 2$-Matrizen mit reellen Einträgen und Determinante $\neq 0$, d.h.

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ und } det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) \neq 0 \right\}.$$

**a)** Gegeben $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, definiert man eine $2 \times 2$-Matrix $A^{-1}$ wie folgt:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \text{ mit } a' = \frac{d}{ad-bc}, b' = \frac{-b}{ad-bc}, c' = \frac{-c}{ad-bc}, d' = \frac{a}{ad-bc}.$$

Erklären Sie, warum $A^{-1}$ sich definieren lässt und warum $A^{-1} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

**b)** Zeigen Sie, dass $A \cdot A^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = A^{-1} \cdot A$, wobei „$\cdot$“ hier die übliche Matrixmultiplikation bedeutet, d.h.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$$

**c)** Beweisen Sie: $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ bildet mit der üblichen Matrixmultiplikation eine Gruppe.