Übungsblatt 11

5.1.2023
Vektorräume, Lineare Abbildungen, Isomorphie

Hausaufgaben

(Abgabe über Moodle bis spätestens 13:00 Uhr am 13. Januar 2023.)

Aufgabe H1

Betrachten Sie die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ c^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

wobei a, b, c reelle Zahlen sind.

a) Für welche Werte von $a, b, c \in \mathbb{R}$ bildet $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Wählen Sie nun Werte für a, b, c und konstruieren Sie eine *von der Identität verschiedene* lineare Abbildung (über $\mathbb{R}$) von W nach $\mathbb{R}^3$, wobei $W = \operatorname{span}(\{v_1, v_2, v_3\}) \subset \mathbb{R}^3$.

c) Bestimmen sie die Dimension des Bildes und des Kerns der von Ihnen in **(b)** konstruierten linearen Abbildung.

Aufgabe H2

Es seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U_1, U_2 \subset V$ Untervektorräume. Angenommen, es gibt einen weiteren Untervektorraum $W \subset V$ dergestalt, dass $V = U_1 \oplus W$ sowie $V = U_2 \oplus W$ gilt. Beweisen Sie, dass U_1 und U_2 isomorph sind.