Übungsblatt 7

26.11.2022
Unterräume, lineare Unabhängigkeit

Hausaufgaben

(Abgabe über Moodle bis spätestens 23:59 Uhr am 3. Dezember 2022.)

Aufgabe H1

Gegeben sei der kleinste Körper, d.h. der Restklassenkörper F_2 (Beispiel 4.30(c) im Vorlesungsskript). Betrachten Sie den F_2-Vektorraum V gegeben durch

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in F_2 \right\}.$$

Wie viele nicht-triviale (d.h. von V und $\left\{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}$ verschiedene) Untervektorräume hat V? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe H2

Betrachten Sie den Polynomring $\mathbb{R}[x]$, d.h. den Ring der Polynome in der Variabel x und mit reellen Koeffizienten.

a) Geben Sie einen vollständigen Beweis dafür, dass $\mathbb{R}[x]$ zusammen mit der Polynomaddition und mit der Multiplikation von Polynomen mit Konstanten aus $\mathbb{R}$ einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet.

b) Zeigen Sie nun, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede Teilmenge $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}[x]$ mit n *linear unabhängigen* Vektoren einen weiteren Vektor $v_{n+1} \in \mathbb{R}[x]$ gibt, so dass $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ immer noch linear unabhängig sind.

c) Geben Sie unendlich viele (verschiedene) Beispiele von Untervektorräumen von $\mathbb{R}[x]$ an.