Übungsblatt 4

4. November 2022
Gruppen, Ringe, Körper

Hausaufgaben

(Abgabe über Moodle bis spätestens 13:00 Uhr am 11. November 2022. Eine Abgabekachel wird rechtzeitig freigeschaltet.)

Betrachten Sie folgende Definition:

Definition: Monoid
Eine Menge M mit einer Verknüpfung $\circ : M \times M \to M$ heißt *Monoid*, wenn die Eigenschaften (I) und (II) der Definition einer Gruppe erfüllt sind, d.h. wenn es ein neutrales Elemente e in M gibt und die Verknüpfung asoziativ ist.

Aufgabe 1

Zeigen oder wiederlegen Sie, ob folgende Mengen mit der angegebenen Verknüpfung Monoide sind.

a) $(\mathbb{N}, +)$, wobei $+$ die übliche Addition auf $\mathbb{N}$ sei.

b) $(\mathbb{N}, \cdot)$, wobei $\cdot$ die übliche Multiplikation sei.

c) $(\mathbb{R}^n, +)$, wobei $+$ die komponentenweise Addition der Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ sei.

d) $(\mathbb{R}^n, \times)$, wobei für $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ und $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ in $\mathbb{R}^n$ die Verknüpfung $\times$ wie folgt definiert ist:

$$a \times b := \sum_{i=1}^{n} = a_i \cdot b_i.$$

e) Sei M eine Menge und bezeichne $P = \mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge von M. Zeigen Sie, dass P mit der Vereinigung $\cup$ als Verknüpfung ein Monoid ist.

f) Sei $\mathbb{Z}[x]$ die Menge aller Polynome in der Variabel x mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$, d.h. die Menge der ganzzahligen Polynome in einer Variabel. Betrachten Sie zwei Verknüpfungen: Addition „+“ von Polynomen und der Multiplikation „·“ von Polynomen.

Aufgabe 2

Welche der in Aufgabe 1 betrachteten Mengen mit Verknüpfung sind Gruppen? Begründen Sie ihre Antworten.

Aufgabe 3

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $g \in G$ fest gewählt. Sei $\phi_g : G \to G$ definiert durch $x \mapsto g \circ x \circ g^{-1}$.

a) Zeigen Sie, dass ϕ bijektiv ist und folgende Eigenschaft hat:

$$\forall a, b \in G \text{ gilt } \phi_g(a \circ b) = \phi_g(a) \circ \phi_g(b).$$

b) Unter welchen Bedingungen an g oder G stimmt ϕ_g in jedem Fall mit der Identitäsabbildung auf G überein?