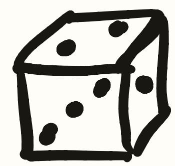
Aus der Geschichte der Stochastik:

Von Würfeln  ...

... zu Axiomen

1. ...
2. ...
3. ...

Ringvorlesung zu Geschichte und Grundlagen der Mathematik, 5. 1. 2022

Prof. Dr. Anja Janßen, IMST

Die Stochastik (Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik) ist eines der jüngeren Gebiete der Mathematik.

Aber schon zu Pythagoras' Zeiten (570 v. Chr. - 510 v. Chr.) wurde mit dem Zufall gespielt in Form von Würfeln.

Astragaloi, Knochen aus den Hinterbeinen von Paarhufern, Grabbeigaben aus prähistorischer Zeit (30.000 - 20.000 v. Chr.) 2)

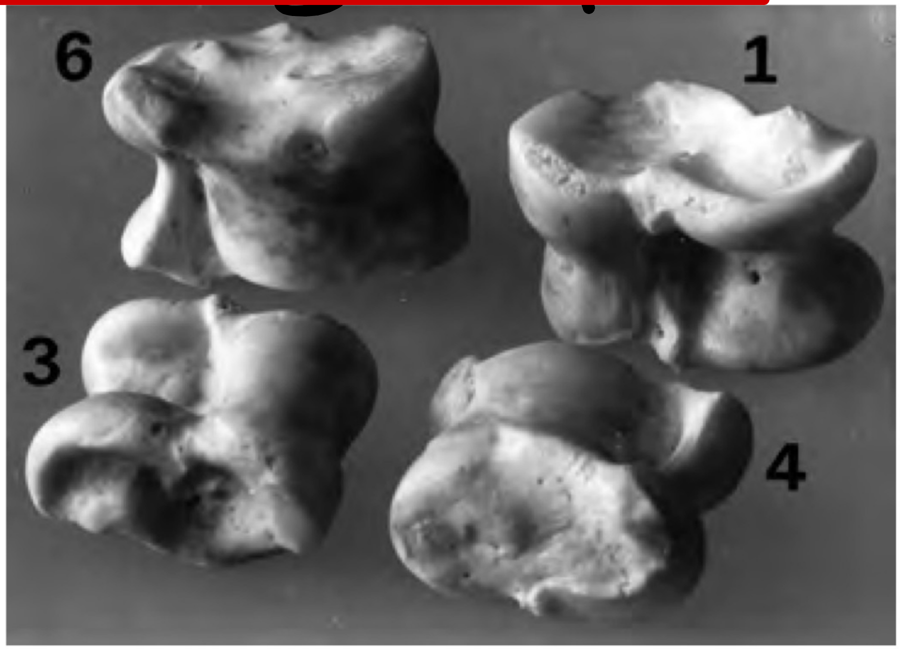
Würfel um 680 v. Chr. 1)

Quellen: 1) Wikimedia: Marcus Cyron / Greece 2008, CC, 2) public domain

Astragaloi und Würfel wurden zum Zeitvertreib im Glücksspiel aber auch als Orakel benutzt.
So schreibt Pausanias (ca. 115 – 180 n. Chr., griechischer Schriftsteller und Geograph) über die antike Stadt Bura auf der nordöstlichen Peloponnes:

> »Geht man von Bura zum Meer hinab, so ist da […] ein nicht großer Herakles in einer Höhle. […] Man kann dort mit einer Tafel und Astragaloi Orakelsprüche erhalten. Wer den Gott befragen will, betet vor der Statue und nimmt dann vier von den reichlich vor dem Herakles liegenden Astragaloi und lässt sie auf einen Tisch fallen. Zu jeder Konfiguration dieser vier Astragaloi ist auf einer Tafel eine dazu passende Erklärung aufgeschrieben.«
>
> Quelle: s. nächste Seite

Deutungsbeispiel:



Die vier möglichen Lagen eines Astragalos. Angegeben sind die Werte der oben liegenden Flächen.

Abbildung und Text aus
R. Haller & F. Barth
"Berühmte Aufgaben der Stochastik"
de Gruyter, Oldenburg, 2014

Orakelliste aus dem 2. Jh. n. Chr. aus dem unter römischer Herrschaft stehendem Kleinasien:

44466 24 Kronos, der Kinderfresser
Drei Vierer, zwei Sechser. Das ist der Rat der Gottheit: // Bleib zu Haus und geh nicht irgendwohin, // Damit nicht die reißende Bestie und die rächende Furie über Dich kommen; // Denn ich sehe, dass das Vorhaben weder gefahrlos noch sicher ist.

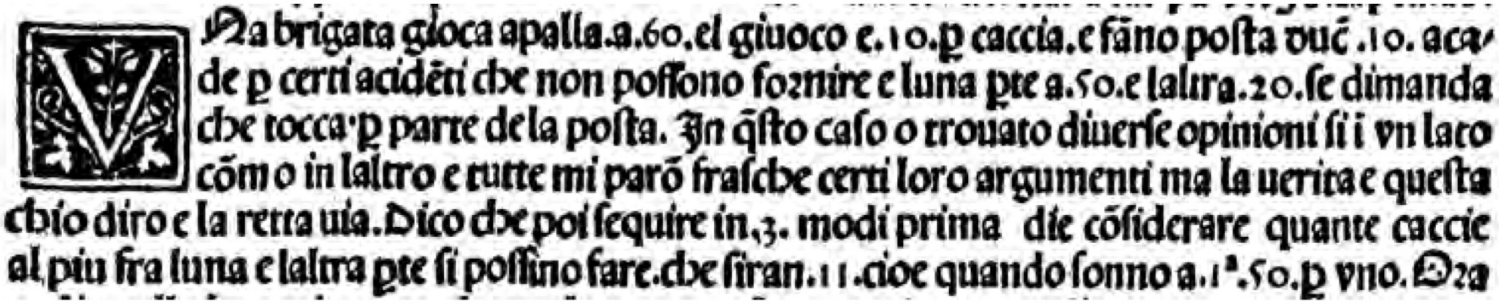
66661 25 Der lichtspendende Mondgott
Vier Sechser und der fünfte Wurf eine Eins. Das bedeutet: // Wo Wölfe über Lämmer herfallen und mächtige Löwen // Gehörnte Ochsen bezwingen, so wirst Du alles überwinden. // Mit Hilfe des Hermes, des Zeussohnes, werden Deine Wünsche erfüllt.

Es gibt jedoch in der Literatur der Antike keine Ansätze für eine mathematische Untersuchung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, wobei einer der Gründe dafür sein könnte, dass Glücksspiele nicht mit wissenschaftlichen Methoden untersucht wurden und auch in einigen Kulturkreisen (z.B. dem Islam) tabuisiert bzw. verboten waren bzw. sind.

Die (wahrscheinlich?) erste Frage der Stochastik: Das Aufteilungsproblem

Luca Pacioli:

- *: um 1445, Toskana, †: 1514 oder 1517 in Rom
- Franziskaner-Mönch und Mathematiker (Professor an verschiedenen italienischen Universitäten)
- Freund und Mathematik-Lehrer von Leonardo da Vinci
- Wichtigstes Werk: "Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalitá" (gedruckt 1494)



Vna brigata gioca a palla a.60.el giuoco e.10.p caccia.e fano posta duc.10. acade p certi acidēti che non possono fornire e luna pte a.50.e laltra.20.se dimanda che tocca p parte de la posta. In qsto caso o trouato diuerse opinioni si i vn laco cōm o in laltro e tutte mi parō frasche certi loro argumenti ma la uerita e questa chio diro e la retta uia. Dico che poi sequire in.3. modi prima die cōsiderare quante caccie al piu fra luna e laltra pte si possino fare. che siran.11.cioe quando sonno a.1°.50.p vno. Ora

Ausschnitt aus fol. 197r der Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita

Eine Brigade spielt Ball auf 60 und 10 für das Einzelspiel. Sie setzen zehn Dukaten ein. Es geschieht durch gewisse Vorfälle, dass sie zu keiner Entscheidung gelangen können. Die eine trennt sich mit 50, die andere mit 20. Man fragt, welcher Anteil des Einsatzes jeder zufällt.

Sinngemäße Übertragung: Zwei Mannschaften spielen ein Ballspiel. Jede gewonnene Partie bringt 10 Punkte. Gewonnen hat diejenige Mannschaft, die 60 Punkte erreicht. Jede Mannschaft setzt zehn Dukaten ein. Der Sieger erhält den gesamten Einsatz. Durch gewisse Umstände wird das Spiel beim Stand 50 : 20 abgebrochen. Welcher Anteil des Einsatzes steht jeder Mannschaft zu?

Quelle: Haller & Barth (2014)

Hier stellt sich (vielleicht das erste Mal) die Frage nach einer "Mathematik des Möglichen". Wie ergibt sich aus den möglichen zukünftigen Spielverläufen eine gerechte Aufteilung?

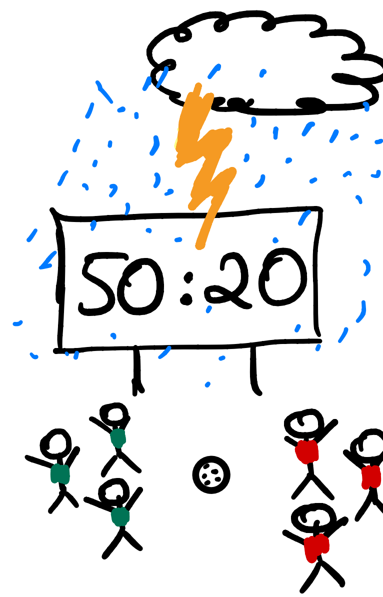
Lösung nach Pacioli:

Für dieses Problem habe ich verschiedene Lösungsvorschläge, die in die eine oder andere Richtung gehen, vorgefunden; alle kommen mir ungereimt vor in bezug auf einige ihrer Argumente. Aber die Wahrheit ist das, was ich sagen werde […]

Du sollst herausfinden, wie viele Einzelspiele insgesamt von den beiden Parteien höchstens gemacht werden können; dies sind 11, nämlich dann, wenn beide vorher je 50 Punkte aufweisen. Nun siehst Du, welchen Anteil an allen diesen Einzelspielen die mit 50 Punkten haben; sie haben nämlich 5/11; und diejenigen mit 20 Punkten haben 2/11. Deshalb kann die eine Partei 5/11 und die andere 2/11 vom Einsatz nehmen. Summiert macht das 7/11. […]

Maximale Anzahl Spiele / Tore:

11, wenn 60:50 oder 50:60 gewonnen wird



Pacioli schlägt vor, den Einsatz im Verhältnis 5:2 aufzuteilen, d.h.

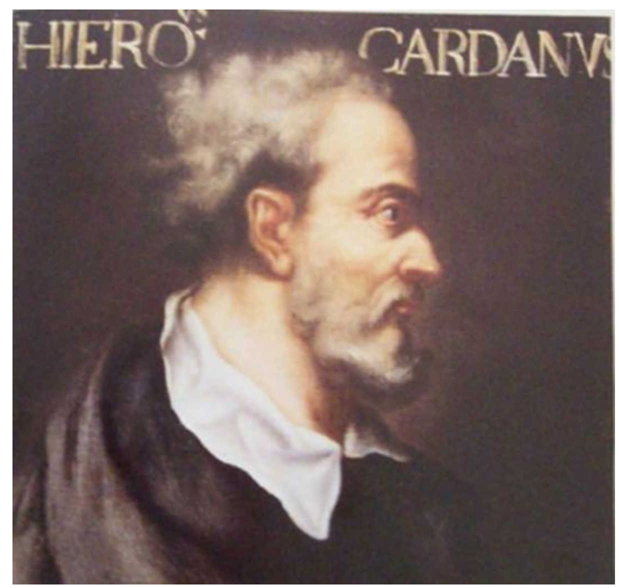
$\frac{5}{7} \cdot 20$ Dukaten für Team 1,

$\frac{2}{7} \cdot 20$ Dukaten für Team 2.

Eine eindeutige Lösung?

Gerolamo Cardano:

- *1501 in Padua, †: 1576 in Rom
- Arzt, Philosoph und Mathematiker
- "Liber de Ludo Aleae" (1663, d.h. posthum veröffentlicht) über Gewinnchancen in Würfelspielen
- Außerdem: Wichtige Rolle in der Analyse kubischer Gleichungen ($ax^3+bx^2+cx+d=0$), erkannte die Bedeutung komplexer Zahlen



Cardano kritisiert Paciolis Lösung!

Aus der "Practica Arithmetica et mensurandi singularis", Mailand 1539, Abschnitt "Über die Fehler des Fra Luca"

Bei der Berechnung der Spiele schoss er einen gewaltigen, sogar von einem Knaben erkennbaren Bock, wobei er andere kritisiert und seine Meinung als ausgezeichnet lobt. Dabei gibt er, wenn zwei auf 6 Gewinnspiele spielen, dem, der 5 hat, und dem anderen mit 2 nach vielen überflüssigen Überlegungen 5 bzw. 2 Teile, so dass er die Gesamtsumme in 7 Teile teilt.

Nehmen wir deshalb an, dass zwei auf 19 Gewinnspiele spielten und einer 18, der andere nur 9 hätte. Er wird dann dem ersten 2/3 der Gesamtsumme und 1/3 dem zweiten geben. Sei also der Einsatz 12 Goldstücke; die Summe von beiden wird 24 sein, von denen 16 dem ersten und 8 dem zweiten zustehen: Jener, der 18 Gewinnspiele aufweist, hat nur 4 Goldstücke von seinem Gegner gewonnen, was ein Drittel des Einsatzes ausmacht, und doch fehlt ihm zum vollständigen Gewinn nur ein Spiel, während dem zweiten 10 fehlen. Das aber ist völlig absurd.

Cardano schlägt vor, nur die Anzahl der fehlenden Spiele bis zum Sieg zu berücksichtigen

$\Longrightarrow$ Team A: Fehlende Spiele: $1 =: a$

Team B: Fehlende Spiele: $4 =: b$

und den Einsatz im Verhältnis

$$(1+2+\ldots+b) : (1+2+\ldots+a)$$

$$\frac{b\cdot(b+1)}{2} : \frac{a(a+1)}{2}$$

$$b\cdot(b+1) : a\cdot(a+1)$$

aufzuteilen

Hier also: $10:1$.

Es fehlt aber eine genaue Motivation dafür.

3. Meinung:

Nicolo Tartaglia

- * 1499 oder 1500 in Brescia
  † 1557 in Venedig
- Mathematiker
- Lieferte wichtigen Beitrag zur Lösung kubischer Gleichungen, geriet darüber aber auch in heftigen Streit mit Cardano

(⇒ Link-Tipp: Youtube-Video zu "How imaginary numbers were invented" ("Epic math duel"), User: Veritasium)

Tartaglia hat ähnlichen Einwand wie Cardano

Aus: "La prima parte del General Trattato di Numeri, et Misure", 1556, Venedig

> Bruder Luca aus Borgo legt folgendes Problem vor: Eine Gesellschaft spielt Ball auf 60 Punkte. […] In diesem Problem sagt der genannte Bruder Luca, der für die eine wie die andere Richtung verschiedene Lösungsvorschläge vorfand, dass ihm aber all ihre Argumente ungereimt erscheinen und dass die richtige Methode und die Wahrheit diejenige sei, dass […]
>
> Diese seine Regel scheint mir weder schön noch gut zu sein. Denn wenn zufällig eine der Parteien 10 Punkte und die andere nichts hätte und man nach seiner Regel vorgehen würde, würde sich ergeben, dass die Partei mit den besagten 10 Punkten alles nehmen und die andere überhaupt nichts nehmen dürfte, was vollkommen sinnlos wäre, dass man mit 10 das Ganze nehmen dürfte.

Auch Tartaglia erkennt, dass es auf die verbleibenden Spiele ankommt statt auf die gespielten.

Idee: Wie viel Vorsprung hat die führende Partei?

Und deshalb sage ich, dass ein solches Problem eher juristisch als durch die Vernunft gelöst wird; egal, auf welche Art und Weise man es löst, es gibt immer einen Grund zu streiten. Nichtsdestotrotz erscheint mir die am wenigsten anfechtbare Lösung die folgende:
Man stelle zunächst fest, welchen Anteil jeder vom Gesamtspiel hat, d.h. wenn einer zufällig 10 und der andere 0 hat, hätte also derjenige, der 10 hat, ein Sechstel des Gesamtspiels; und deshalb sage ich, dass er in diesem Fall ein Sechstel der Dukaten bekommen müsste, die sie pro Mann eingesetzt haben; d.h. wenn man 22 Dukaten pro Partei einsetzt, müsste er ein Sechstel besagter 22 Dukaten, nämlich 11/3 Dukaten erhalten, die zusammen mit seinen 22 Dukaten 25 2/3 Dukaten ausmachen, und die andere Partei darf den Rest nehmen.

Wenn nun die eine Partei 50 und die andere 30 hätte, müsste man 30 von 50 abziehen. Es bleiben 20, und diese 20 sind ein Drittel des Gesamtspiels. Deshalb dürfte man (außer seinem eigenen Anteil) auch ein Drittel des Geldes der anderen Partei nehmen, und dieses Drittel sind 22/3 Dukaten, die zusammen mit seinen eigenen insgesamt 29 1/3 Dukaten ausmachen.

Wenn man so verfährt, ergibt sich als Folge nichts Unangenehmes wie bei der Lösung von Bruder Luca.

Vorteil: Einfache Regel

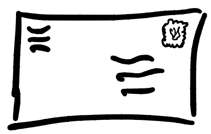
Nachteil: Auch hier keine mathematische Begründung, nur "am wenigsten anfechtbar"?

Die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung

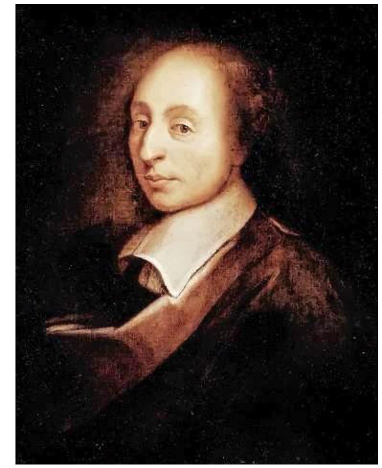
Ein Briefwechsel zwischen

Pierre de Fermat

- * 1607, † 1665 Frankreich
- Mathematiker und Jurist
- Wichtige Beiträge zur Zahlentheorie und analytischen Geometrie



Blaise Pascal



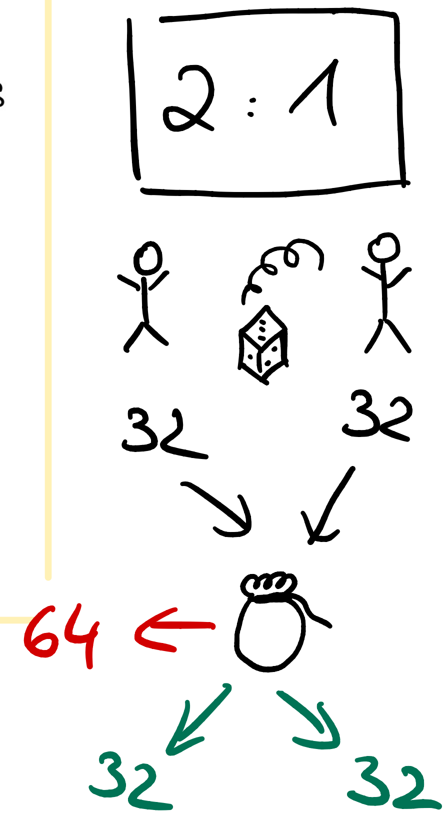
- * 1623, † 1662 Frankreich
- Mathematiker, Physiker, Literat, Philosoph
- Pascalsches Dreieck, Pascaline (1654 erfundene mechanische Rechenmaschine)

Im Briefwechsel taucht das Problem von Luca Pacioli auf, auf das Pascal und Fermat durch einen gemeinsamen Bekannten aufmerksam gemacht werden.
Sie fassen es als ein faires Glücksspiel auf, d.h. jede Partei/jeder Spieler hat in jeder Runde die gleiche Chance auf den Sieg.
Brief von Pascal an Fermat, 29. Juli 1654

Mein Herr, 1. Die Ungeduld erfaßt mich ebenso wie Sie und, obgleich ich noch im Bett liege, muß ich Ihnen unbedingt mitteilen, daß ich gestern abend von Herr de Carcavi Ihren Brief über das Teilungsproblem erhielt, den ich so sehr bewundere, daß ich es nicht in Worte fassen kann. Ich habe nicht die Zeit, mich weitläufig auszulassen, aber Sie haben - mit einem Wort - die beiden Teilungen beim Würfeln und beim Spielabbruch vollständig richtig gefunden: ich bin damit gänzlich befriedigt; denn ich zweifle nun nicht mehr daran, daß ich auf dem richtigen Weg bin nach der erstaunlichen Übereinstimmung, in der ich mich mit Ihnen finde […]
2. Ihre Methode ist sehr sicher und ist diejenige, die mir als erste bei dieser Untersuchung einfiel; weil aber der Aufwand mit den Kombinationen zu groß ist, habe ich dafür eine Vereinfachung, eigentlich eine andere, viel kürzere und klarere Methode gefunden, die ich Ihnen hier in wenigen Worten darstellen möchte: Denn ich möchte Ihnen von nun an, wenn möglich, mein Herz öffnen, so sehr freut es mich, uns in Übereinstimmung zu sehen. Ich sehe wohl, daß die Wahrheit in Toulouse und in Paris dieselbe ist.

Pascal erläutert zunächst, was das mathematische Äquivalent zu einer fairen Aufteilung ist

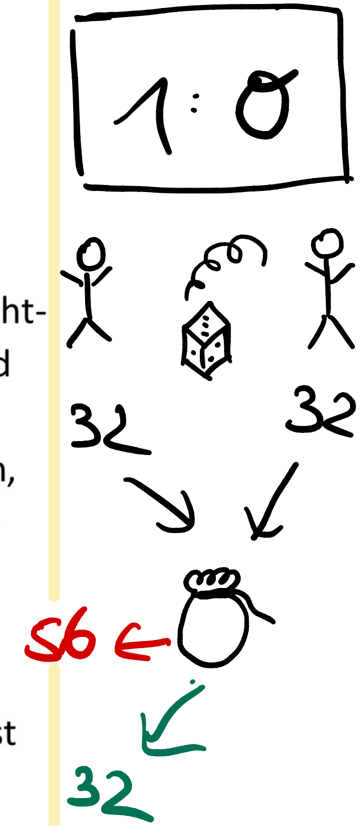
> Hier nun in etwa, wie ich den Wert jedes einzelnen Spiels bestimme, wenn zwei Spieler beispielsweise auf drei Gewinnsätze spielen und jeder 32 Pistoles eingesetzt hat: Nehmen wir an, daß der erste zwei und der andere eine Partie gewonnen hat; sie spielen nun eine Partie, deren Ausgang folgendes festlegt: Wenn der erste sie gewinnt, gewinnt er den gesamten Spieleinsatz, nämlich 64 Pistoles; wenn der zweite sie gewinnt, steht es zwei Partien zu zwei Partien, und folglich muß jeder seinen Einsatz, nämlich 32 Pistoles, zurücknehmen, falls sie sich trennen wollen. Beachten Sie nun, mein Herr, daß dem ersten 64 zustehen, wenn er gewinnt; wenn er verliert, stehen ihm 32 zu. Wenn sie also diese Partie nicht wagen und sich, ohne zu spielen, trennen wollen, muß der erste sagen: "32 Pistoles sind mir sicher, denn die erhalte ich selbst bei Verlust; aber was die anderen 32 betrifft, vielleicht werde ich sie erhalten, vielleicht werden Sie sie erhalten, die Aussichten sind gleich. Teilen wir diese 32 Pistoles zu gleichen Teilen und geben Sie mir meine 32, die mir sicher sind." Er wird also 48 Pistoles erhalten und der andere 16.



$$48 = 0.5 \cdot 64 + 0.5 \cdot 32$$

Nehmen wir jetzt an, daß der erste zwei Partien gewonnen hat und der andere keine und daß sie eine weitere Partie beginnen. Der Ausgang dieser Partie legt fest, daß der erste, wenn er sie gewinnt, das ganze Geld, 64 Pistoles, nimmt; gewinnt sie der andere, dann sind sie wieder beim vorhergehenden Fall angelangt, bei dem der erste zwei Partien und der andere eine gewonnen hat. Nun haben wir schon gezeigt, daß in diesem Fall dem, der zwei Partien

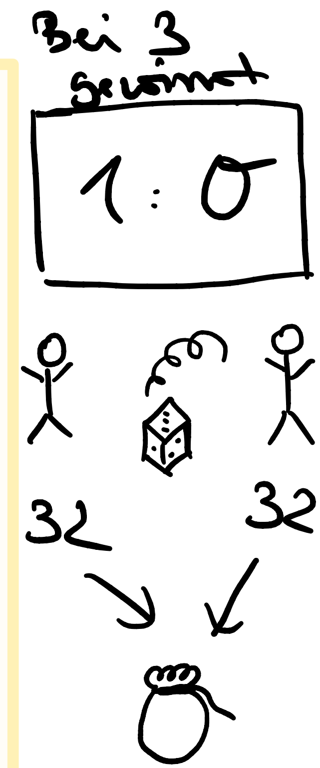
gewonnen hat, 48 Pistoles zustehen. Deshalb muß er, falls sie diese Partie nicht spielen wollen, sagen: "Wenn ich sie gewinne, gewinne ich alles, das sind 64; wenn ich sie verliere, stehen mir rechtmäßig 48 zu: Geben Sie mir also die 48, die mir selbst für den Fall, daß ich verliere, gewiß sind, und teilen wir die anderen 16 zu gleichen Teilen, weil die Chance, diese zu gewinnen, für Sie genauso groß ist wie für mich." Er wird also 48 und 8, das sind 56 Pistoles, erhalten. Nehmen wir endlich an, daß der erste nur eine Partie gewonnen hat und der andere keine. Sie sehen, mein Herr: wenn sie eine neue Partie beginnen, legt deren Ausgang fest, daß, wenn der erste gewinnt, es zwei zu null steht und ihm mithin nach dem vorhergehenden Fall 56 Pistoles zustehen; verliert er sie, steht es eins zu eins: ihm stehen also 32 Pistoles zu. Er muß also sagen: "Wenn Sie die Partie nicht spielen wollen, geben Sie mir 32 Pistoles, die mir sicher sind, und teilen wir den von 56 verbleibenden Rest zu gleichen Teilen. Nehmen Sie 32 von 56 weg, es bleiben 24; teilen Sie also 24 zu gleichen Teilen; nehmen Sie davon 12 weg und ich 12, was mit 32 zusammen 44 macht."



Pascal schlägt vor, das Problem rekursiv mit Hilfe des Erwartungswertes zu lösen.

Fermat schlägt eine direkte Lösung vor, die Pascal wie folgt zusammenfasst

Brief von Pascal an Fermat, 24.8.1654



Mein Herr, ...

2. Dies ist Ihr Vorgehen, wenn es zwei Spieler sind: Wenn zwei Spieler, die auf mehrere Gewinnspiele spielen, sich in der Lage befinden, daß dem ersten zwei und den zweiten drei Gewinnspiele fehlen, so muß man, sagen Sie, für die gerechte Aufteilung des Einsatzes schauen, nach wie vielen Partien das Spiel in jedem Fall zu Ende entschieden sein wird. Es ist leicht zu überlegen, daß das nach vier Partien der Fall sein wird. Daraus schließen Sie, daß man feststellen müsse, wie viele Anordnungen von Spielausgängen es bei vier Partien und zwei Spielern gibt, und weiterhin, wie viele Anordnungen den ersten Spieler und wie viele den zweiten zum Gewinner machen, und daß man den Einsatz diesem Verhältnis entsprechend teilen müsse. Ich hätte gerade diese Überlegung nur schwerlich verstanden, wenn ich sie mir nicht schon vorher selbst klargemacht hätte; Sie haben sie wohl auch in diesem Sinn niedergeschrieben. Um nun zu sehen, wie viele Anordnungen bei vier Partien und zwei Spielern existieren, muß man sich vorstellen, daß sie mit einem Würfel mit zwei Seiten spielen (weil es nur zwei Spieler gibt), wie bei Wappen oder Zahl, und daß sie vier dieser Würfel werfen (weil sie vier Partien spielen); und jetzt muß man überlegen, wie viele verschiedene Lagen diese Würfel einnehmen können. Das ist leicht zu berechnen: sie können 16 haben, das ist die zweite Potenz von vier, d. h. das Quadrat. Denn stellen wir uns vor, daß eine der Seiten, mit 1 gekennzeichnet, für den ersten Spieler günstig ist und die andere, mit 2, für den zweiten, dann können diese vier Würfel eine dieser sechzehn Lagen einnehmen:

Sieger	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	2	2	2
2	1	1	1	2	1	1	2	1	2	1	2	2	1	2	2	2
3	1	1	2	1	1	2	1	1	2	2	1	2	2	1	2	2
4	1	2	1	1	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2	1	2

Sieger	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	2	2	2
2	1	1	1	2	1	1	2	1	2	1	2	2	1	2	2	2
3	1	1	2	1	1	2	1	1	2	2	1	2	2	1	2	2
4	1	2	1	1	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2	1	2

Wie wäre die faire Aufteilung nach dieser Regel, wenn es 5 : 2 steht? Und bei 6 das Spiel gewonnen ist.

Und weil dem ersten Spieler zwei Partien fehlen, lassen ihn alle Lagen mit mindestens zwei 1 gewinnen: davon gibt es 11 für ihn; und weil dem zweiten hier drei Partien fehlen, lassen ihn alle Lagen, in denen mindestens drei 2 vorhanden sind, gewinnen; davon gibt es also 5. Somit müssen sie den Einsatz im Verhältnis von 11 zu 5 teilen.

Der Trick: Es werden immer vier weitere Partien gespielt (auch wenn das Spiel vorher entschieden ist) und jeder der Ausgänge ist gleich wahrscheinlich. Sind noch maximal n Partien zu spielen, erhält ein Spieler, dem noch k Partien zum Sieg fehlen, einen Anteil von

$$\frac{\text{Anzahl Möglichkeiten, um mindestens } k \text{ Elemente aus } n \text{ auszuwählen}}{2^n}$$

Lösung:

$$\boxed{5:2}$$

Es sind noch maximal 4 Spiele zu spielen.

Sieger	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
1	1	1	1	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	2	2	2
2	1	1	1	2	1	1	2	1	2	1	2	2	1	2	2	2
3	1	1	2	1	1	2	1	1	2	2	1	2	2	1	2	2
4	1	2	1	1	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2	1	2

Lösung: $\frac{15}{16}$ für Spieler 1.

$\frac{1}{16}$ für Spieler 2.

- Pascal und Fermat sind die ersten, die begründen, warum der Erwartungswert einer Zufallsvariable X, d.h., für $X \in \mathbb{N}_0$, der Wert

$$\boxed{E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) \cdot n,}$$

einen "fairen Wert" eines Spiels mit zufälliger Auszahlung X darstellt.

- Ihre Korrespondenz beeinflusst viele Zeitgenossen und kurze Zeit später (1657) schreibt der Niederländer Christiaan Huygens die erste Abhandlung über die Theorie des Würfelspiels, die als eine der Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie gilt.

Aber wieso ist die Stochastik dann eine relativ junge Disziplin?

- Auch im 18. und 19. Jahrhundert fehlten die mathematischen Möglichkeiten, um eine saubere Theorie für andere als Laplace-Modelle zu entwickeln.

  Endlicher Grundraum Ω, alle $\{\omega\}, \omega \in \Omega$, sind gleich wahrscheinlich.

- Eine Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitstheorie (vor allem in Hinblick auf Anwendungen in der Physik) ist das <u>6.</u> von David Hilberts (→ Vortrag Grunau) <u>23 Problemen von 1900.</u>

<u>Als erstes</u>: Was <u>ist</u> überhaupt eine Wahrscheinlichkeit?

- Gut verstanden: "gleich wahrscheinliche Ereignisse", z.B. Ausgänge beim Würfelwurf.
- Doch was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
  - eine gezinkte Münze Kopf zeigt?
  - bei der nächsten Bundestagswahl die Grünen die absolute Mehrheit gewinnen?
  - man bei unendlich vielen Würfen einer fairen Münze unendlich oft Kopf sieht?

Viele Mathematiker, Physiker, Philosophen, Psychologen ... haben Definitionen des Begriffs "Wahrscheinlichkeit" vorgeschlagen

- Wahrscheinlichkeit = Limes einer empirischen relativen Häufigkeit

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\#\{\text{Beobachtungen in } n \text{ Experimenten, in denen } A \text{ eintritt}\}}{n}$$

- Wahrscheinlichkeit = Grad subjektiver Überzeugung
- Wahrscheinlichkeit = Einem Objekt innewohnende Eigenschaft

Was nun? ⇒ Andere Frage: Was soll für Wahrscheinlichkeiten gelten? !

Andrei Nikolajewitsch Kolmogorov

- $*$ 1903, Tambov, † 1987, Moskau
- Veröffentlichte 1933:
- Darin: Die später nach ihm benannten Axiome zum Wahrscheinlichkeitsraum

$$(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

Grund-raum, σ-Algebra, Wahrschein-lichkeitsmaß

ERGEBNISSE DER MATHEMATIK
UND IHRER GRENZGEBIETE
HERAUSGEGEBEN VON DER SCHRIFTLEITUNG
DES
„ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK"
ZWEITER BAND
3

GRUNDBEGRIFFE DER
WAHRSCHEINLICHKEITS-
RECHNUNG

VON
A. KOLMOGOROFF

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1933

Copyright: Kurt Schwitters, Wikimedia

Copyright: Konrad Jacobs, MFO Photo Collection

Wobei:

$P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, so dass

- $P(A) \geq 0$, für alle $A \in \mathcal{A}$
- $P(\Omega) = 1$ und
- für alle paarweise disjunkten $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$P\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n).$$

Seit 1933 baut die gesamte Stochastik auf diesen Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf.

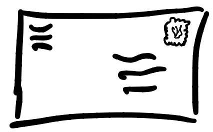
Grundidee:

(auf den Punkt gebracht in Kolmogorovs Lehrbuch, aber aufbauend auf früheren Ideen)

Eine Wahrscheinlichkeit ist ein Maß und verhält sich insofern nicht anders als eine Länge, ein Flächeninhalt, ein Gewicht, ein Volumen ... :

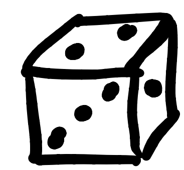
- Es ist nicht negativ
- Es ist normiert
- Maße von disjunkten Objekten addieren sich.

Zusammenfassung:

- Mathematische Erkenntnis entsteht in der Diskussion ⇒ Problem → falsche Ansätze → Lösung ←  →

- Die Abstraktion eines Begriffes kann ausschlaggebend sein für den Erfolg des Konzepts

  1 ....
  2 ....
  3 ....

- Wie wir ein stochastisches Problem modellieren, bleibt uns überlassen, aber die Eigenschaften von W'keiten sind bekannt. 

Quellen:

- "Berühmte Aufgaben der Stochastik", R. Haller & F. Barth, de Gruyter, 2013
- "Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie", I. Schneider, Akademie Verlag, 1988
- "Ten great ideas about chance", P. Diaconis & B. Skyrms, Princeton University Press, 2017
- Wikipedia-Einträge der hier genannten Personen