Partielle Differentialgleichungen II - Sommersemester 2021

Hans-Christoph Grunau

Detailplanung und Vorbereitungshinweise

Ich möchte die zoom-Vorlesungen aufzeichnen und Ihnen zum Nachhören und Nachlesen zur Verfügung stellen. Bitte äußern Sie eventuelle Bedenken vor Beginn der Vorlesung. Nichtäußerung von Bedenken werte ich als Zustimmung.

Bitte bereiten Sie sich auf die jeweiligen Vorlesungen vor, indem Sie die angegebenen Seitenbereiche durchlesen und sich dabei besonders auf die angegebenen Schwerpunkte konzentrieren.

In den Vorlesungen werden die Themen dann erklärt. Zunächst ausführlich die wichtigsten Begriffe und Resultate. Dann komme ich auf die „technischen“ Schritte zu sprechen und erläutere vor allem Beweisideen und -strategien.

Übersicht

Grob betrachtet, gliedert sich die Vorlesung wie folgt:

- §§12-14: Das Cauchyproblem für lineare hyperbolische Probleme
- §§15, 16: Das Cauchyproblem für nichtlineare hyperbolische Probleme
- §§17-19: Eignwerttheeorie für den Laplaceoperator zur eleganten Lösung zeitabhängiger Anfangsrandwertprobleme
- §§20, 21: Prototypische Darstellung der Lösung des Dirichletproblems für die Minimalflächengleichung

Detailplanung

Es folgt eine detaillierte Einteilung des vorgesehenen Stoffs auf die jeweiligen Vorlesungen. Außerdem gebe ich Ihnen hier Hinweise zur Vorbereitung der Vorlesung. Ich arbeite regelmäßig an dieser Datei, um Sie bestmöglich bei Vor- und Nachbereitung zu unterstützen. Laden Sie sich also bitte einmal wöchentlich die dann aktuelle Datei herunter.

- KW 14
  - Montag, der 5. April: Ostern, keine Vorlesung

- Vorlesung am Dienstag, den 6. April: S. 100-103
  Das Cauchyproblem für die Wellengleichung in ungeraden Raumdimensionen $n \geq 3$, I: Mittelwerte, Euler-Poisson-Darboux-Gleichung, Hilfssätze 12.3, 12.4.

- KW 15
  - Vorlesung am Montag, den 12. April: S. 104-108
    Das Cauchyproblem für die Wellengleichung in ungeraden Raumdimensionen $n \geq 3$, II: Hilfssatz 12.5, Kirchhoffsche Formeln Satz 12.6, Bestimmtskegel, Einflussbereich, Huygenssches Prinzip
  - Vorlesung am Dienstag, den 13. April: S. 108-114
    Das Cauchyproblem für die Wellengleichung in ungeraden Raumdimensionen $n \geq 3$, Schluss: Eindeutigkeitssatz 12.8 mittels einer Energiemethode, Maximumabschätzungen der Lösung und zeitliches Abklingen
    Das Cauchyproblem für die Wellengleichung in geraden Raumdimensionen: Hadamardsche Absteigemethode führt die Lösungsformel auf die nächsthöhere Raumdimension zurück.

- KW 16
  - Vorlesung am Montag, den 19. April: S. 115-120 oben
    Duhamelsches Prinzip: Die Methode der Variation der Konstanten aus den gewöhnlichen Differentialgleichungen wird genutzt, um eine Lösungsformel für das Cauchyproblem für inhomogene Wellengleichungen herzuleiten, siehe Satz 14.3. Um diese einfache Idee umzusetzen, muss allerdings in dem eher technischen Hilssatz 14.2 die erforderliche Glattheit der Lösungsscharen diskutiert werden. Im Beispiel 14.4 werden aus dem allgemeinen Prinzip konkrete Lösungsformeln für die physikalisch relevanten Dimensionen $n = 1, 2, 3$ hergeleitet.
    Nichtlineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung: Kurze Einführung in die Problemstellung. Die Unterscheidung linear vs. nichtlinear (vereinfacht vs. realistisch) hat ja schon die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen geprägt: Globale Existenz vs. Kurzzeitexistenz. Das wird im Folgenden nicht anders sein.
  - Vorlesung am Dienstag, den 20. April: S. 120-124
    In §10 wurde das Cachyproblem für eine extrem einfache lineare Differentialgleichung mittels der Charakteristikenmethode gelöst. Charakteristiken sind Kurven, entlang derer sich die Information aus den Anfangsdaten weiterentwickelt. Das funktioniert nur für Probleme, in denen es keine Diffusion gibt, also hyperbolische. Bemerkenswerterweise lässt sich diese Methode auf ein Cauchyproblem sogar für voll nichtlineare Differentialgleichungen erster Ordnung verallgemeinern.
    Die Herleitung dieses Systems charakteristischer Diffenrentialgleichungen erfolgt in Satz 15.2; beachten Sie, dass die Charakteristiken im (x, z, p)-Raum zu bestimmen sind, also auch im Wertebereich der Lösung und deren Ableitung verlaufen.
    Beispiel 15.2 diskutiert Vereinfachungen für den linearen und quesilinearen Fall. Beispiel 15.3. stellt die Beziehung zu §10 her.

- KW 17
  - Vorlesung am Montag, den 26. April: S. 125-130
    Mittels der Charakteristikenmethode und „etwas Glück“ kann man Anfangswertprobleme explizit lösen: dieses wird in Beispielen 15.4-15.6 gezeigt. In Beispiel 15.7 wird die quasilineare reibungsfreie Burgers-Gleichung durchgerechnet. Diese ist ein Prototyp für „Schockbildung“ und wird etwa bei Modellierung von Verkehrsströmen eingesetzt. In diesem Beispiel werden die Grenzen der Charakteristikenmethode und damit klassischer Lösbarkeit gezeigt; in §16 wird dieses wichtige Beispiel mit Blick auf globale schwache Lösungen gründlich weiterdiskutiert. Die Beispielsammlung schließt in 15.8 mit einem voll nichtlinearen Beispiel.
  - Übung am Dienstag, den 27. April: Besprechung von Übungsblatt 1

- KW 18
  - Vorlesung am Montag, den 3. Mai: S. 131-135 Mitte
    In den Beispielen der vorhergehenden Vorlesung waren die Hyperflächen Γ, auf denen die Anfangsdaten gegeben waren, immer extrem einfach. Nicht nur Rechnen geht mit „geradem“ Γ besser, sondern auch die Theoriebildung. Andererseits sollen in allgemeinen Sätzen auch allgemeine Γ zugelassen werden. In 15.9 wird nun die für die gesamte Analysis so wichtige Technik des Geradebiegens von Γ, und wie sich dadurch das Cauchyproblem transformiert, besprochen.
    15.10-15.13 befassen sich mit der Frage, unter welchen Voraussetzungen und wie man aus den Anfangsdaten für die Lösung auch Anfangsdaten für deren Ableitung konstruieren kann: Nichtcharakteristikenbedingung!
    Mit der Charakteristikenmethode erhält man den Ort als abhängige Variable von Hyperflächen- und Zeitvariable. Um den Ort als unabhängige Variable zu haben, bedarf es der inversen Abbildung, deren lokale Existenz in Satz 15.14 gesichert wird.
  - Vorlesung am Dienstag, den 4. Mai: S. 135-139
    Zentraler Gegenstand dieser Vorlesung ist der lokale Existenzsatz 15.15. Die Punkte 1 und 2 des Beweises ergeben sich aus dem vorher Besprochenen: Lösen des Systems charakteristischer Gleichungen und daraus Konstruktion einer potentiellen Lösung. Anspruchsvoll ist Schritt 3, wo gezeigt wird, dass der potentielle Gradient p in der Tat mit ∇u übereinstimmt. Bemerkung 15.19 thematisiert Vereinfachungen im quasilinearen Fall und die Eindeutigkeitsproblematik im voll nichtlinearen Fall.

- KW 19
  - Vorlesung am Montag, den 10. Mai: S. 140-144 Mitte
    Wie angekündigt werden nun skalare Erhaltungsgleichungen als Verallgemeinerung der reibungsfreien Burgersgleichung sowohl bzgl. lokaler klassischer als auch globaler schwacher Lösbarkeit studiert. Satz 16.1 verbessert den allgemeinen Satz 15.5 insofern, als die klassischen Lösungen zwar nur lokal in der Zeit, dafür aber global bzgl. $x \in \mathbb{R}^n$ existieren.

Nach endlicher Zeit können Schocks entstehen, die klassische Lösung hört auf zu existieren, aber man möchte dennoch die Entwicklung der Schocklinie zeitlich weiter verfolgen. Dazu werden in 16.3 „sehr“ schwache Lösungen eingeführt.

  - Übung am Dienstag, den 11. Mai: Besprechung von Übungsblatt 2

- KW 20

  - Vorlesung am Montag, den 17. Mai: S. 144-149
    Weiterführung der schwachen Lösungstheorie für skalare Erhaltungsgleichungen: In 16.4 wird die Situation betrachtet, wo in zwei aneinander stoßenden Bereichen jeweils klassische Lösungen vorliegen, die längs der Trennlinie zwischen diesen Bereichen in der Regel Sprungunstetigkeiten haben. Ist längs dieser „Schocklinie“ die *Rankine-Hugoniot-Bedingung* erfüllt, so liegt in ganz $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ eine schwache Lösung vor. Für diese Existenz bezahlt man aber den Preis der Nichteindeutigkeit; neben physikalisch sinnvollen hat man auch „unphysikalische“ Lösungen.

  - Vorlesung am Dienstag, den 18. Mai: S. 150-154 Mitte
    Zunächst wird ein Kriterium angesprochen, mit dem man die „richtige“ unter allen oben erwähnten schwachen Lösungen auszeichnen kann.
    Dann geht es in Kapitel V um Eigenwertprobleme für das Dirichletproblem etwa für den Laplaceoperator. Damit wird ein eleganter Weg eröffnet, Anfangsrandwertprobleme für Wärmeleitungs- und Wellengleichung zu lösen. Die Idee wird wieder aus der Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen genommen. Dort musste ein Weg gefunden werden, einfach $\exp(tA)$ bzw. $\cos(tA), \sin(tA)$ zu berechnen. Im Falle symmetrischer Matrizen A führt dieser Weg über Diagonalisierung, d.h. das Auffinden von Orthonormalbasen aus Eigenfunktionen. Bei partiellen Differentialgleichungen wird man in unendlichdimensionalen Sobolevräumen arbeiten müssen. Deshalb geht es in §17 los mit einem Steilkurs über elementare Hilbertraumtheorie. Das zentrale Hilfsmittel schlechthin in Hilberträumen ist der Projektionssatz 17.3. Dieser besagt im wesentlichen, dass man sich abgesehen vom Verlust der Lokalkompaktheit unendlichdimensionale Hilberträume ganz analog zum euklidischen $\mathbb{R}^n$ vorstellen kann.
    In allgemeinen Banachräumen bleibt von der Hilbertraumtheorie nur noch ganz wenig übrig!!

- KW 21

  - Montag, der 24. Mai: Pfingsten, keine Vorlesung

  - Übung am Dienstag, den 25. Mai: Besprechung von Übungsblatt 3

- KW 22

  - Vorlesung am Montag, den 31. Mai: S. 154-158
    Mit dem Projektionssatz kann man Projektoren auf abgeschlossene Teilräume

definieren und in separablen Hilberträumen das Konzept der Orthonormalbasen erweitern. Hierzu sind „nur“ unendliche, konvergente Darstellungen zuzulassen. Siehe Sätze 17.9 bis 17.11.

- Vorlesung am Dienstag, den 1. Juni: S. 159-162
  In 17.12 und 17.13 geht es um trigonometrische Polynome auch in mehreren Veränderlichen und damit um die klassischen Fourierreihen.
  Um problemangepasste vollständige Orthonormalsysteme konstruieren zu können, ist ein Kompaktheitskonzept für Hilberträume unumgänglich, denn lokale Folgenkompaktheit ist ja im allgemeinen falsch. Wie stark folgenkompakte Mengen typischerweise aussehen, wird in Beispiel 17.14 geklärt.
  Der geeignete Konvergenzbegriff, um wieder Resultate für lediglich beschränkte Mengen zu haben, und damit für eine Abschwächung der bekannten Kompaktheit ist der der schwachen Konvergenz.

- KW 23
  - Vorlesung am Montag, den 7. Juni: S. 163-167 Mitte
    Zwei zentrale Resultate: Satz 17.20, die lokale schwache Folgenkompaktheit in allgemeinen Hilberträumen. Rellichscher Einbettungssatz 17.21, Kompaktheit der Einbettung $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ ist für beschränktes Ω kompakt. Das heißt: Beschränkte Folgen in $H_0^1(\Omega)$ haben in $L^2(\Omega)$ stark konvergente Teilfolgen.
  - Übung am Dienstag, den 8. Juni: Besprechung von Übungsblatt 4

- KW 24
  - Vorlesung am Montag, den 14. Juni: S. 167-171
    Hinter §18 steht die Tatsache, dass der Lösungsoperator für das Dirichletproblem für den Laplaceoperator kompakt ist. Das wird nicht explizit formuliert, aber die Sätze 18.1 (Unbeschränktheit der Folge der Eigenwerte) und 18.2 (Existenz von Minima von Rayleigh-Ritz-Quotienten) spiegeln genau dieses wider. Als Höhepunkt folgt dann in Satz 18.3 die Existenz eines vollständigen Systems von Eigenfunktionen des Laplaceoperators. Betrachten Sie dieses als das unendlichdimensionale Pendant des Satzes von der Hauptachsentransformation für symmetrische Matrizen.
  - Vorlesung am Dienstag, den 15. Juni: S. 171-175 Mitte
    Nach einer Bemerkung über die Verallgemeinerungsfähigkeit dieses Zugangs geht es in §19 los, zunächst mit Anwendungen auf das Anfangsrandwertproblem für die Wärmeleitungsgleichung. In 19.2 bis 19.4 sehen Sie, dass Sie die Differentialgleichung für jede Eigenfunktion selbst lösen können. Dann müssen Sie nur noch beliebige Anfangsdaten in diesen Eigenfunktionen darstellen. Zunächst wird eine sehr schwache Lösung konstruiert.

- KW 25
  - Vorlesung am Montag, den 21. Juni: S. 175-179
    Zunächst wird das Thema der vorhergehenden Vorlesung aufgegriffen und für

bessere Anfangsdaten eine bessere Lösung konstruiert. In dieser Lösungsklasse gelingt in 19.7 auch leicht ein Eindeutigkeitsbeweis.
Im zweiten Teil dieser Vorlesung wird diese erfolgreiche Theorie genauso auf die Wellengleichung angewandt.

  - Übung am Dienstag, den 22. Juni: Besprechung von Übungsblatt 5

- KW 26

  - Vorlesung am Montag, den 28. Juni: S. 180-184 Mitte
    Das Dirichletproblem für die Minimalflächengleichung ist geometrisch anschaulich und hat daher als eine Haupttriebfeder der modernen nichtlinearen Analysis in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts fungiert. Von diesem Flair sollen die letzten drei Vorlesungen einen Eindruck vermitteln. Zunächst erkläre ich auf S. 180, 181, was ein quasilinearer elliptischer Operator ist und wie sich der Minimalflächenoperator hier einordnet.
    Zentral in dieser Vorlesung ist die Beobachtung in 20.6, das nichtlineare Dirichletproblem mittels linearer Lösungstheorie in eine nichtlineare Fixpunktgleichung umzuschreiben. Diese lineare Theorie wird in 20.3 und 20.4 referiert; diese müssen wir in Hölderräumen (s. 20.1) durchführen; H_0^1 ist ungeeignet für die Minifalflächengleichung.
  - Vorlesung am Dienstag, den 29. Juni: S. 184 Mitte-187
    Zur Behandlung der Fixpunktgleichung in 20.6 werden in 20.8 und 20.9 zwei zentrale Fixpunktsätze für kompakte Operatoren aus der nichtlinearen Funktionalanalysis zitiert, die in Satz 20.10 zur Methode der a-priori-Schranken führen. Diese besagt, dass man eine Lösung hat, sofern man eine Schranke hat, für die folgendes gilt: Angenommen, das Problem hat irgendeine Lösung, dann liegt deren Norm unter dieser Schranke. Hört sich paradox an, ist es aber nicht!
    Die Umsetzung dieses Programms für die Minimalflächengleichung wird nun in der verbleibenden Zeit noch erläutert. Die Maximumabschätzung in Hilfssatz 21.1 folgt direkt aus dem Maximumprinzip für lineare Gleichungen. Hört sich paradox an, ist es aber nicht, weil man die Elliptizitätsmoduln nicht kontrollieren muss.

- KW 27

  - Vorlesung am Montag, den 5. Juli: S. 188-191
    Hier geht es um Gradientenabschätzungen für Lösungen des Dirichletprinzips für die Minimalflächengleichung. Das erfolgt zunächst in 21.5 am Rande mittels des Maximumprinzips und einer Bedingung an den Rand und die Randdaten, die man als Verschärfung einer Konvexitätseigenschaft interpretieren kann. Die inneren Abschätzungen folgen in 21.6 und 21.7 wieder aus dem Maximumprinzip, denn auch die Ableitungen der Lösungen lösen eine elliptische Differentialgleichung. Gradienten-Hölder-Schranken werden in 21.9 nur zitiert, und so erhalten wir den grundlegenden Existenzsatz 21.10.
  - Übung am Dienstag, den 6. Juli: Besprechung von Übungsblatt 6